Math. R
633e

Weigl

J. B.

J. B. Weigl's,
[illegible]
[illegible]

Rechenkunst

zum Gebrauche
der
[illegible]schen und Gewerbsschulen
und zum
Selbstunterrichte.

Mit ... Tafeln
[illegible]
[illegible]

Fünfte Auflage
[illegible]

von

Dr. Joh. Bapt. [illegible]
[illegible]
[illegible]

Sulzbach,
in der J. E. v. Seidel'schen Buchhandlung.
1 8 [illegible]

BIBLIOTHECA

J. B. Weigl's,

ehemals k. b. Rektors und Professors des Lyceums,
nun
geistlichen Rathes und Domkapitularen zu Regensburg,

Lehrbuch
der
Rechenkunst

zum Gebrauche
an
lateinischen und Gewerbschulen
und zum
Selbstunterrichte.

Mit Tafeln
über die Masse, Gewichte und Münzen verschiedener Staaten,
besonders
des Königreichs Bayern, und des alten Roms und Griechenlands.

Fünfte Auflage.
Zum drittenmale bearbeitet und vielfach vermehrt
von
Dr. Joh. Bapt. Wandner,
k. b. Lycealprofessor und Rektor der Kreis-Landwirthschafts- und
Gewerbschule zu Regensburg.

Sulzbach,
in der J. E. v. Seidel'schen Buchhandlung.
1846.

Bayerische Staatsbibliothek München
211. D.

J. B. Weigl's,

[illegible]

Lehrbuch

der

Rechenkunst

zum Gebrauche

in

lateinischen und Gewerbeschulen

und zum

Selbstunterrichte.

Mit Tafeln

[illegible]

Fünfte Auflage.

[illegible]

von

Dr. Joh. Bapt. [illegible]

[illegible]

Sulzbach,

[illegible]

[illegible]

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede

zur fünften Auflage.

Bei Bearbeitung dieser neuen Auflage habe ich abermals viele Abänderungen und Zusätze gemacht, um die Brauchbarkeit des Buches in Beziehung auf Vollständigkeit, Faßlichkeit und Gründlichkeit zu erhöhen. Insbesondere habe ich die Zahl der Uebungsaufgaben vermehrt, einen neuen Abschnitt über das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel (§. 85—98.) und eine Anleitung zur Berechnung der auf Zeitbestimmungen (§. 39.), Wechselreduktionen (§. 137.), Feingehalt (§. 144. u. folg.) ꝛc. ꝛc. bezüglichen Aufgaben beigefügt. Eine sorgfältige Vergleichung der beiden ersten Abtheilungen der metrologischen Tafeln mit andern neueren und als genau bekannten Maß-, Gewichts- und Münzbestimmungen und Umarbeitung derselben nach diesen dürfte das Buch dem Schüler auch nach dessen Austritte aus der Schule als brauchbar im Geschäftsleben darstellen. Hiezu benützte ich vorzüglich: „Kalender für das Jahr 1843 und 1844 von Hofrath Dr. J. B. W. Hermann“ (nun k. b. Ministerialrath Dr. J. B. W. von Hermann), „Vollständiges Taschenbuch der

Münz-, Maß- und Gewichtsverhältnisse von Chr. Noback und Friedr. Noback, 1841—1846, bis jetzt 8 Lieferungen," „Unterricht für Gold- und Silberarbeiter von Fr. X. Haindl 1843," „Chr. Schmitz über Maße und Gewichte im Königreiche Bayern, im Kunst- und Gewerbeblatt 1845," „Nelkenbrecher der Jüngere 1845." Eben so möchte bei der Lektüre der Klassiker die (unverändert gebliebene) Angabe der Maße der alten Römer, Griechen und Hebräer in der dritten Abtheilung nicht unwillkommen seyn.

Regensburg, im Monat September 1846.

Dr. Joh. Bapt. Wandner.

Inhalt.

Seite

Einleitung. Ueber den Gegenstand der Rechenkunst. . . 1

I. Abschnitt. Zahlensystem. Numeriren. 3

II. Abschnitt. Von den Rechnungsarten überhaupt. . . . 6

I. Artikel. Von den Stammrechnungsarten mit ganzen Zahlen.

I. Hauptstück. Von den Stammrechnungsarten mit ganzen unbenannten Zahlen.

I. Addition. 7

II. Subtraktion. 9

III. Multiplikation. 12

IV. Division und Theilbarkeit der Zahlen. . . . 19

II. Hauptstück. Von den Stammrechnungsarten mit ganzen benannten Zahlen.

Vorbegriffe und Vorübungen. 30

I. Addition. 32

II. Subtraktion. 34

III. Multiplikation 38

IV. Division. 41

II. Artikel. Von den Brüchen überhaupt. 46

I. Von den gemeinen Brüchen.

A. Vorbegriffe und Vorübungen. 49

B. Rechnungsarten mit unbenannten Brüchen.

I. Addition. 54

II. Subtraktion. 54

III. Multiplikation. 56

IV. Division. 58

C. Rechnungsarten mit benannten Brüchen. . . . 61

II. Hauptstück. Von den Dezimalbrüchen. Seite
A. Vorbegriffe und Vorübungen. 64
B. Rechnungsarten mit unbenannten Dezimalbrüchen.
I. Addition und Subtraktion. 69
II. Multiplikation. 70
III. Division. 73
C. Rechnung mit benannten Dezimalbrüchen. . . 76
III. Hauptstück. Von den Kettenbrüchen. . . . 80

III. Artikel. Vom Potenziren und Wurzelausziehen.
A. Vorbegriffe. 84
B. Quadrat und Quadratwurzel. 85
C. Kubus und Kubikwurzel. 92

III. Abschnitt. Vom Potenziren und Wurzelausziehen.
Vorbegriffe. 98
I. Artikel. Von den arithmetischen Proportionen.
I. Hauptstück. Mit unbenannten Zahlen. . . . 100
II. Hauptstück. Anwendung auf benannte Zahlen. . 102

II. Artikel. Von den geometrischen Proportionen.
I. Hauptstück. Mit unbenannten Zahlen. . . . 104
II. Hauptstück. Anwendung auf benannte Zahlen. . 109
A. Regel de Tri. 110
B. Wälsche Praktik (Rechnungsvortheile rc.) . . . 115
C. Ueber den Gebrauch der Reduktionstabellen. . . 120
D. Zusammengesetzte Proportionen. 125
E. Regula Falsi. 132
F. Proportionen nach dem Reesischen Ansatze. . . 133
G. Handelsrechnungen nach Prozenten. 141
I. Gewinn und Verlust. 141
II. Tara. 142
III. Fusti, Gutgewicht. 143
IV. Spesen. 144
V. Rabatt, Diskonto, Agio. 145
VI. Wechselreduktionen. 146

Seite

H. Division in proportionirte Theile. 148

I. Vermischungs- oder Verbindungsregel. . . . 153

Alligationsrechnung. (Vorerklärungen, Feinrechnen ꝛc.) 154

Metrologische Tafeln.

I. Abtheilung. Maße, Gewichte, Münzen ꝛc. nach ihren Eintheilungen in Bayern. 163

II. Abtheilung. Benennung, Eintheilung und Vergleichung neuerer Maße und Gewichte auswärtiger Staaten mit den neueren französischen und bayerischen, dann Eintheilung und Werthbestimmung der neueren Münzen nach dem $24\frac{1}{2}$ Gulden-, 14 Thaler- und 24 Guldenfuße. 177

III. Abtheilung. Maß-, Gewichts- und Münz-System der alten Römer, Griechen, Hebräer mit Bemerkungen über Zahlenbezeichnung der Griechen und Römer. . . . 211

Berichtigungen.

S. 10 Z. 7 v. u. l. und st. oder — S. 49 Z. 16 v. o. l. Quotienten von Brüchen st. Quotienten — S. 69 Z. 8 v. o. l. 1000 st. 100 — S. 83 Z. 13 v. u. l. Behufe st. Zwecke — S. 88 Z. 1 v. u. l. □' st. □'' — S. 95 Z. 16, 17 und 26 l. $\sqrt[3]{}$ st. $\sqrt[4]{}$ — S. 97 Z. 6 v. o. l. $\sqrt[3]{}$ st. $\sqrt{}$ — S. 108 Z. 6 v. o. l. 7—3 st. 7 3 — S. 115 Z. 6 v. o. l. Einlage st. Anlage — S. 160 Z. 5 v. u. l. 45 kr. st. 45 — S. 165 Z. 22 v. o. l. Chaussée st. Caussée.

Am Ende des §. 104. S. 103 ist beizufügen:

Zusatz. Jahre der christlichen Zeitrechnung vor Christi Geburt stehen mit Jahren der vor Christus beginnenden Zeitrechnungen in verkehrten arithmetischen Verhältnissen, d. h. um wie viele Einheiten die ersteren abnehmen, um so viele nehmen die letzteren zu. Dabei entspricht das Jahr 1 vor Christus dem Jahre 753 Roms, dem Jahre 776 der Olympiaden und dem Jahre 4004 (nach Petavius 3983) der Erschaffung der Welt.

Beispiel. Miltiades besiegt die Perser bei Marathon im J. 490 v. Chr.; in welchem Jahre der Olympiaden?

$490 - 1 = 776 - x = 287$ Olympiadenjahre

oder $= \frac{287}{4} = 71\frac{3}{4}$ Olympiaden,

d. h. im dritten Jahre der 72. Olympiade.

Einleitung.

Ueber den Gegenstand der Rechenkunst.

§. 1.

Jedes Ding, welches aus Theilen besteht, oder bestehend gedacht werden kann, z. B. eine Summe Geldes, eine Linie, heißt eine **Größe** (quantum); die Menge solcher Theile macht dessen **Quantität** aus.

Besteht eine Größe aus abgesonderten Theilen, wie ein Haufe Getreidekörner, so heißt sie **diskret**; sind die Theile, aus welchen eine Größe bestehend gedacht werden kann, zusammenhängend, wie bei einer Linie, so heißt sie **stätig**.

Die Quantität eines Dinges kann nur durch Vergleichung mit einem anderen, bereits bekannten Dinge von derselben Art bestimmt werden. So kann z. B. die Länge einer Linie nur dadurch bestimmt werden, daß man angibt, wie oft eine andere Linie von bekannter Länge, nämlich eine Elle, ein Fuß, ein Zoll rc. in ihr enthalten ist; die Größe einer Summe Geldes wird durch die Angabe, wie viel Gulden, Kreuzer rc. sie enthalte, bestimmt. Dieses Vergleichen heißt bei stätigen Größen **Messen**, bei diskreten **Zählen**; das dabei zu Grund gelegte bekannte Ding die **Einheit**; die dadurch bestimmte Quantität der gezählten Größe **Zahl**.

Daher kann Einheit ein jedes Ding seyn, in wieferne es für sich betrachtet wird; Zahl aber ist der Inbegriff von Einheiten einerlei Art.

§. 2.

1. Es können die Zahlen an und für sich betrachtet werden, ohne daß die Einheit, auf welche sie sich beziehen, näher bezeichnet wird; dann heißen sie **unbenannte, stumme Zahlen**. Sind sie auf einen bestimmten Gegenstand bezogen, führen sie eine Benennung, z. B. Gulden (florenus, fl.), Pfunde (libra ℔) u. s. w. mit sich, so heißen sie **benannte Zahlen**.

2. Zahlen heißen **gleichartig**, wenn sie auf die nämliche Einheit bezogen werden, **ungleichartig**, wenn sie in Beziehung auf verschiedene Einheiten in Betracht kommen. Z. B. fünf Gulden und drei Gulden sind gleichartig, weil sie sich beide auf die nämliche Einheit, den Gulden, beziehen. Acht Kronenthaler und vier Dukaten sind ungleichartig, in wieferne auf die Verschiedenheit jener Geldstücke gesehen wird; sind aber, als Geldstücke überhaupt betrachtet, gleichartig.

3. Man kann eine Einheit, öfters genommen, als neue Einheit, mehrere Einheiten der letzteren Art zusammen wieder als neue Einheit betrachten u. s. w., und darnach Einheiten **niedrigerer** und **höherer Ordnung** unterscheiden. So ist z. B. ein Gulden in Beziehung auf den Kreuzer eine höhere, dieser in Beziehung auf jenen eine niedrigere Einheit.

4. Wird eine Zahl als Inbegriff von mehreren Einheiten der nämlichen Art, ohne Rücksicht auf eine höhere Einheit betrachtet, so heißt sie eine **ganze Zahl**; wird sie aber als ein Theil einer höheren Einheit betrachtet, so heißt sie eine **gebrochene Zahl**, **Bruch**. Die nämliche Zahl kann daher sowohl als ganze, als auch als gebrochene Zahl betrachtet werden. So sind z. B. acht Kreuzer eine ganze Zahl, in wie ferne man diese Summe Geldes bloß auf die Einheit Kreuzer bezieht; sie sind ein Bruch, in wieferne man sie als Theil der höheren Einheit, des Guldens, betrachtet.

§. 3.

Die Zahlen (ganze und gebrochene, benannte und unbenannte) können auf mehrfache Weise miteinander verbunden, verändert und nach ihren Beziehungen zu einander betrachtet werden.

Die Lehre von den Verbindungen der Zahlen und ihren Beziehungen zu einander heißt **Arithmetik** oder **Rechenkunst**.

Anmerkung. Die **Arithmetik** beschäftigt sich mit diskreten Größen (Zahlen); die Lehre von stätigen Größen heißt **Geometrie**.

I. Abschnitt.

Zahlensystem. Numeriren.

§. 4.

1. Die absolute, d. i. allen (unbenannten) Zahlen zu Grunde liegende Einheit ist das Eins. Durch Wiederholung dieser Einheit entstehen alle Zahlen: Eins und Eins zusammengenommen geben Zwei, Zwei und Eins geben Drei, Drei und Eins geben Vier, u. s. w. So kann man sich die Zahlen in das Unendliche fortgebildet denken. Wollte man aber für jede mögliche Zahl ein ganz neues Wort und besondere Zeichen gebrauchen, so würden Benennung und Bezeichnung äußerst zusammengesetzt, ja unmöglich werden. Diesem Mißstande wird durch das allgemein eingeführte Zahlensystem, welches man das Dezimalsystem oder die Dekadik nennt, abgeholfen. Man versteht darunter jene Unterordnung der Zahlen, nach welcher zehn Einheiten einer Ordnung eine Einheit der nächst höheren Ordnung geben.

2. Die Einheiten der ersten Ordnung heißen Einer, die der zweiten Zehner, die der dritten Hunderter, die der vierten Tausender; darauf folgen zehn Tausend, hundert Tausend. Tausend mal Tausend geben eine Million, Million mal Million eine Billion ꝛc. Zwei Zehner heißen zwanzig, drei Zehner dreißig u. s. f.

3. Einheiten verschiedener Ordnungen verbindet man so miteinander, daß man zuerst die Einheiten der höchsten, dann der nächst niedrigeren Ordnung setzt. Hievon macht man bei dem Aussprechen der Zehner in Verbindung mit Einern eine Ausnahme, indem man zuerst letztere, dann erstere ausspricht, und zwar bei den Zahlen über zwanzig mit dem Verbindungswörtchen und, bei den Zahlen unter zwanzig ohne dasselbe. Außerdem sagt man auch statt eins zehn kürzer eilf, statt zwei zehn kürzer zwölf. Z. B. Vier Tausender, fünf Hunderter, vier Zehner und sechs Einer spricht man zusammen aus: Viertausend fünf hundert sechs und vierzig.

4. Die Einheiten der sieben ersten Ordnungen kann man nach ihrer Aufeinanderfolge und abgekürzt in nachstehender Art schreiben:

Mill., Ht., Zt., T., H., Z., E.

1*

Diese Benennungen und Bezeichnungen wiederholen sich auch zwischen Millionen und Billionen, Billionen und Trillionen ꝛc., so daß man von Trillionen abwärts folgende Reihe erhält:

Trill. | Ht., Zt., T., H., Z., Bill. | Ht., Zt., T., H., Z., Mill. | Ht., Zt., T., H., Z., E.

oder auch in der Form:

Billionen.	Millionen.
Ht., Zt., (E.)T.; H., Z., E.	Ht., Zt., (E.)T.; H., Z., E.

Ht., Zt., (E.)T.; H., Z., E.

Anmerkung. Im Duodezimalsystem oder in der Dodekadik geben je zwölf, in der Dyadik je zwei Einheiten einer Ordnung die nächst höhere Ordnung.

§. 5.

Die Zeichen, welche man bei dem Anschreiben der Zahlen der Kürze halber gebraucht, heißen Ziffern. Man bedient sich zur Bezeichnung der verschiedenen Zahlen gewöhnlich der arabischen Ziffern: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und zwar in der Art, daß durch diese Zeichen nicht bloß die neun ersten Zahlen, sondern mit Beihülfe von 0, welches für sich allein den Mangel einer Zahl bezeichnet, auch alle folgenden Zahlen ausgedrückt werden. Dieß geschieht dadurch, daß durch die Stelle, welche Ziffern von der Rechten gegen die Linke einnehmen, auch die Ordnung der Einheiten bestimmt wird, daß in der ersten Stelle zur Rechten die Einer, in der zweiten die Zehner ꝛc. stehen.

Jede Ziffer hat also einen doppelten Werth:

1) einen natürlichen, wodurch die Anzahl der Einheiten einer bestimmten Ordnung,

2) einen Lokalwerth, wodurch die Ordnung der Einheiten bestimmt wird. Z. B. 634 bezeichnet sechs Einheiten der dritten, drei Einheiten der zweiten und vier Einheiten der ersten Ordnung, was sechs hundert vier und dreißig ausgesprochen wird.

Eine durch Ziffern ausgedrückte Zahl aussprechen, oder eine gegebene Zahl mit Ziffern bezeichnen, heißt numeriren.

Anmerkung. Unsere Zahlzeichen heißen arabische Ziffern, weil sie seit etwa dem zehnten Jahrhundert von den Arabern in Spanien aus, in den übrigen Ländern von Europa nach und nach verbreitet worden sind. Die Araber erhielten sie wahrscheinlich aus Indien.

§. 6.

Aufgabe. Was immer für eine durch Ziffern ausgedrückte Zahl (z. B. 13046937832145819837) gehörig auszusprechen oder zu lesen.

Auflösung. 1. Man theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von 6 und 6 Ziffern; setze am Ende der ersten Klasse oben (′), welches Millionen, am Ende der zweiten, dritten, vierten, fünften (″), welches Billionen, (‴) Trillionen, (⁗) Quatrillionen, (′⁗) Quintillionen anzeigt.

2) Jede dieser Klassen theile man auf ein Neues nach drei Ziffern durch das Zeichen (,) oder (.) unterhalb der Reihe, welches mit Tausend gelesen wird; nämlich:

13‴046.937″832.145′819.837

3) Nun lese man auf einmal alle zwischen ein Paar Zeichen eingeschlossenen Ziffern (nur in der höchsten Klasse können eine oder zwei stehen) mit dem am Ende stehenden Zeichen; dann heißt es „13 Trillionen, 46 tausend, 937 Billionen, 832 tausend, 145 Millionen, 819 Tausend, 837.“

4) Da sich die Zeichen von den Millionen, Billionen u. s. w. auf alle 6 Ziffern einer Klasse erstrecken, so müssen sie gelesen werden, wenn auch nur eine einzige Zahlziffer in dieser Klasse vorkommt, z. B. 3.000‴269.000″000.001′000.009 wird gelesen: „3 tausend Trillionen, 269 tausend Billionen, 1 Million und 9.“

§. 7.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl richtig mit Ziffern anzuschreiben.

Auflösung. 1) Man setze eine ähnliche Reihe an, wie oben §. 4. 4° angegeben ist;

2) schreibe man unter die entsprechenden Zeichen die gegebenen Ziffern; und

3) ergänze man die fehlenden Zifferstellen durch Nullen.

Z. B. Vier Trillionen, siebzehn tausend achthundert vierzig Billionen, dreimalhundert fünftausend Millionen, vier und dreißigtausend, zweihundert und neun.

Tr.	Ht., Zt., T., H., Z., Bill.	Ht., Zt., T., H., Z., Mill.	Ht., Zt., T., H., Z., E.
4‴	0 1 7, 8 4 0″	3 0 5, 0 0 0′	0 3 4, 2 0 9

II. Abschnitt.

Von den Rechnungsarten überhaupt.

§. 8.

Mit den Zahlen können sechserlei einfachere Verbindungen oder Veränderungen vorgenommen werden, welche man Rechnungsarten nennt, nämlich: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzirung und Wurzelausziehung.

1) Bei der Addition werden mehrere, in der Regel ungleiche, Zahlen zu einem Ganzen vereinigt;
2) bei der Multiplikation werden mehrere unter sich gleiche Zahlen zu einem Ganzen (einer Summe) vereinigt;
3) bei der Potenzirung werden gleiche Zahlen durch Multiplikation (zu einem Produkte) vereinigt;
4) bei der Subtraktion wird eine Zahl von einer andern hinweggenommen;
5) bei der Division wird eine Zahl mehrmal von einer andern hinweggenommen oder bestimmt, in wie viele bestimmte gleiche Theile sie zerlegt werden kann;
6) bei der Wurzelausziehung wird eine Zahl in der Art in mehrere gleiche Theile zerlegt, daß die dadurch erhaltene Zahl, gleich oft mit sich multiplizirt, die gegebene Zahl wieder gibt.

Die drei ersten Rechnungsarten sind Zahlen vereinigend, die drei letzten Zahlen trennend. Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division, Potenzirung und Wurzelausziehung sind einander in der Art entgegengesetzt, daß sie sich gegenseitig zur Probe (Prüfung der Richtigkeit der Rechnung) dienen.

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division heißen Stammrechnungsarten, weil sie den beiden andern Rechnungsarten, so wie allen übrigen Zahlenverbindungen zu Grunde liegen.

Man hat für die Rechnungsarten auch besondere Zeichen, welche zwischen die zu verbindenden Zahlen gesetzt werden:

1) Für die Addition das Zeichen + (plus, und),

2) für die Subtraktion das Zeichen — (minus, weniger),
3) für die Multiplikation das Zeichen . oder × (mal),
4) für die Division das Zeichen : oder einen horizontalen Strich, welcher zwischen die zu verbindenden Zahlen (wie bei Brüchen) so gesetzt wird, daß die eine ober, die andere unter demselben zu stehen kommt.

Anmerkung. Die Zeichen für Potenzirung und Wurzelausziehung werden bei diesen Rechnungsarten angegeben.

Um das Ergebniß der Rechnung mit der Operation selbst zu verbinden, hat man das Zeichen der Gleichheit $=$. Das Zeichen der Ungleichheit ist $>$, in der Art, daß die Oeffnung dieses Zeichens gegen die größere Zahl gekehrt ist. Z. B. $9>7$ wird gelesen: 9 ist größer als 7.

I. Artikel.

Von den Stammrechnungsarten mit ganzen Zahlen.

I. Hauptstück.

Von den Stammrechnungsarten mit ganzen unbenannten Zahlen.

I. Addition.

§. 9.

Addiren heißt eine Zahl finden, welche mehreren gegebenen Zahlen zusammengenommen gleich ist. Letztere heißt man Summanden oder Posten, die zu findende Zahl Summe. Z. B. $5+3=8$; 5 und 3 sind die Summanden, 8 ist die Summe; aber auch die nur angezeigte Addition $5+3$ heißt man (formelle) Summe.

Nur gleichartige Zahlen können addirt, d. i. als Theile zu einem Ganzen vereiniget werden. Im strengsten Sinne können aber von den unbenannten ganzen Zahlen nur Einheiten der nämlichen Ordnung als gleichartig betrachtet werden. (Vergl. §. 2. 2°.)

§. 10.

Aufgabe. Was immer für ganze Zahlen zu addiren.

Auflösung. I. Man schreibe die Summanden so untereinander, daß die gleichartigen Theile, nämlich Einer unter Einer,

Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter rc. zu stehen kommen, und ziehe einen Strich, welcher die Summanden von der Summe scheidet.

II. Nun addire man von der Rechten zur Linken zuerst die Einer, dann die Zehner, dann die Hunderter, und setze die Summe, wenn sie unter 10 ist, jedesmal unter die addirte Columne: ist sie aber größer als 10, oder wirklich zehn (10), so schreibe man nur die letzte Ziffer derselben an; behalte die höhere Ziffer als einen Zehner, und zähle ihn zur Summe der nächst höheren Ordnung. Wäre diese = 0, so kommt der hinübergezählte Zehner an ihre Stelle.

Man addire z. B. 8.974 + 7.493 + 11.825.

Operation.	8.974	Summanden	oder auch	8.974
	7.493			7.493
	11.825			11.825
	28.292	Summe		12 Einer
Beweis. Die Summe 28.292 enthält nun alle Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, welche in den drei Posten, vorkommen, und ist folglich die richtige Summe.				18. Zehner
				21.. Hundert
				16... Tausend
				1.... 10 Tausend.
				28.292

Zusatz 1. Man hätte diese Addition, mit Beobachtung der übrigen Regeln auch nach der Form machen können: 8974 + 7493 + 11.825 = 28.292. Diese Additionsform werden wir bei den Brüchen anwenden.

Zus. 2. Wenn bei sehr großen Additionen die Summe einer Columne auf oder über hundert steigt, so werden zur nächst höheren Stelle die ersten zwei Ziffern als Zehner hinübergezählt, z. B. 137 würde betrachtet als 13 Zehner, 7 Einheiten. — Solche große Additionen pflegt man lieber in mehrere kleine Additionen abzutheilen, und die Partialsummen am Ende in eine Hauptsumme zusammenzuzählen.

Zus. 3. Zur leichteren Vermeidung eines Irrthums, und wenn ein solcher vorgekommen ist, zur leichteren Auffindung und Verbesserung desselben, ist bei größeren Additionen zu rathen, die höhere Ziffer von den Partialsummen nicht bloß im Sinne zu behalten, sondern entweder ober den Strich, oder unter die Summe mit kleinerer Schrift zu ihren Reihen hin zu setzen.

Beispiel.
$$\begin{array}{r} 674506 \\ 37892 \\ 654389 \\ 5007 \\ 27514 \\ \underline{12222} \\ 1399308 \end{array}$$

Außerdem ist zu rathen, jede solche Addition wiederholt, und zwar in verkehrter Ordnung, von oben nach unten, vorzunehmen.

II. Subtraktion.

§. 11.

Von einer Zahl eine andere subtrahiren, heißt von ersterer so viele Einheiten hinwegnehmen, als letztere enthält, oder den Unterschied zwischen beiden finden. Jene Zahl, von welcher abgezogen wird, nennt man Minuend, die abzuziehende Subtrahend oder Subtraktor; die Zahl, welche nach der Subtraktion übrig bleibt, Rest oder Differenz. Z. B. $8 - 5 = 3$ heißt, wenn man von (dem Minuenden) 8 die Zahl (des Subtrahends) 5 subtrahirt, so bleibt der Rest 3. Doch heißt auch die nur angezeigte Subtraktion $8 - 5$ (formeller) Rest.

Auch die Subtraktion setzt, wie die Addition, Gleichartigkeit der Zahlen voraus.

§. 12.

Aufgabe. Zwei Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. I. Man setze den Subtraktor so unter das Minuend, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter zu stehen kommen, und ziehe darunter einen wagerechten Strich.

II. Nun ziehe man von der Rechten gegen die Linke Einer von Einern, Zehner von Zehnern u. s. w. ab, und setze den jedesmaligen Rest in gerader Linie unter die abgezogenen Zifferstellen.

III. Ist der Subtraktor in einer oder der andern Zifferstelle größer als das Minuend, so daß man nicht abziehen kann; so borge man im letzteren — von der nächsthöheren Zifferstelle 1, d. i. mache dieses 1 mit der nächst niedrigeren gleichartig, indem man es als 10 zu dieser addirt, und ziehe nun die Ziffer des Subtraktors von der neuen Summe ab. Die Stelle, von der man geborgt hat, wird oben mit einem Tüpfchen bemerkt.

IV. Soll eine Einheit von 0 geborgt werden, so borge man vorerst für diese eine Einheit von der nächstfolgenden Ziffer; dadurch wird 0 zu 10, und weil hievon für die nächst niedrige Ordnung 1 abgezogen wird, so bleiben an der Stelle von 0 noch 9 Einheiten übrig. Folgen mehrere Nullen aufeinander, so muß man mit dem Borgen bis zur nächst vorausgehenden bedeutsamen Ziffer vorwärts gehen; dadurch verwandelt sich jede vorausgehende Nulle in 9.

Beispiel. 1360025074
342062541
1017962533

§. 13.

Aus dem Begriffe der Subtraktion ergeben sich folgende Sätze:

1) Eine Nulle, von einer Zahl abgezogen, läßt sie unverändert, $9-0=9$. $16-0=16$.

2) Jede Zahl, von sich selbst abgezogen, gibt 0, das ist, hebt sich auf.

3) Eine Differenz wird um so viele Einheiten größer, um wie viele das Minuend bei einerlei Subtrahend größer, oder das Subtrahend bei einerlei Minuend kleiner wird. $9-5$ ist um 2 größer als $7-5$, und $9-5$ ist um 1 größer als $9-6$.

4) Eine Differenz wird um so viele Einheiten kleiner, um wie viele das Minuend bei einerlei Subtrahend kleiner, oder das Subtrahend bei einerlei Minuend größer wird. $12-5$, so wie $15-8$ ist um 3 kleiner als $15-5$.

5) Eine Differenz bleibt unverändert, wenn man die nämliche Zahl zum Minuend und Subtrahend addirt, oder davon subtrahirt, indem dadurch die Differenz immer zugleich um die nämliche Anzahl Einheiten vermehrt oder vermindert wird. Z. B. $12-8=15-11=10-6$, jede Differenz $=4$.

§. 14.

Probe über die Addition und Subtraktion.

Diese beiden Rechnungsarten dienen sich nach §. 8. gegenseitig zur Probe.

A. Bei den Additionen kann die Probe durch die Subtraktion auf zweierlei Weise verrichtet werden.

Erste Art. Man verrichtet die Addition verkehrt, d. i. fängt an, die Summanden von der höchsten Zifferstelle zusammenzuzählen, und zieht die jedesmalige Columnalsumme von den untenstehenden Zifferstellen der Hauptsumme ab; durchstreicht die Zifferstellen, von denen man abgezogen hat, und macht den Rest sichtbar, welcher dann zur nächsten Zifferstelle als Zehner gezogen wird. Wenn man nun von allen Zifferstellen der Hauptsumme also abgezogen hat, so muß am Ende als Rest 0 bleiben. Man kann dieß die auflösende Subtraktionsprobe heißen.

Z. B.		Zergliederung dieser Operation.
4.593	Summanda.	4.593
6.834		6.834
17.390		17.390
28.974		28.974
~~57.791~~	Summa	57.791
~~22 21~~—		

Probe.

	3....	Summe der 1sten Columne.		
Rest..27				
	25...	—	— 2ten	—
Rest...27				
	25..	—	— 3ten	—
Rest....29				
	28.	—	— 4ten	—
Rest.....11				
	11.	—	— 5ten	—
	0			

Zweite Art. Sind zwei Summanden addirt worden, so ziehe man das eine von der Hauptsumme ab, und es erscheint das andere als Rest. Wurden mehr als zwei Summanden addirt, so bringt man sie erst auf zwei, indem man alle bis auf eines, z. B. das erste, in eine Partialsumme addirt, und diese von der Hauptsumme abzieht, wodurch man das übriggelassene erste Summand als Rest erhält.

Beispiele. a)		oder	
1.497			4.186
2.689			— 1.497
4.186	Hauptsumme.		2.689
— 2.689	IItes Summand		
1.497	Istes Summand.		

b) 1.697	Summanden
14.034	
8.321	
728	
24.780	Hauptsumme.
— 23.083	Partialsumme aller Summanden weniger dem ersten.
1.697	erstes Summand.

B. Ueber die Subtraktion wird die Probe gemacht, daß man zum Subtrahend den Rest addirt; dann muß, wenn kein Fehler vorgefallen ist, das Minuend als Summe erscheinen.

Probe über das Beispiel auf Seite 10.

342062541	Subtrahend
1017962533	Rest
1360025074	Minuend.

III. Multiplikation.

§. 15.

Multipliziren heißt eine gegebene Zahl so oft nehmen, als eine zweite Einheiten enthält. Die gegebenen zwei Zahlen nennt man die Faktoren, und zwar die erste das Multiplikand, die zweite den Multiplikator, und die durch Multiplikation hervorgebrachte Zahl das Produkt. Z. B. $5 \times 4 = 20$ heißt, die beiden Faktoren 5 und 4 miteinander multiplizirt geben das Produkt 20, oder: wenn man das Multiplikand viermal (so oft enthält der Multiplikator die Einheit), d. i. $5 + 5 + 5 + 5$ nimmt, so erhält man das Produkt 20. Die Multiplikation ganzer Zahlen ist also eine abgekürzte Addition. Auch die angezeigte Multiplikation 5×4 heißt man (formelles) Produkt.

Eine Zahl mit 0 multipliziren heißt, sie kein Mal nehmen, daher ist das Produkt auch $= 0$; z. B. $4 \times 0 = 0$.

Eine Zahl mit 1 multipliziren heißt, sie einmal setzen oder unverändert lassen; z. B. $4 \times 1 = 4$.

Eine Zahl mit 10, 100, 1000 ꝛc. multipliziren heißt, von ihr das Zehn-, Hundert-, Tausendfache nehmen, oder ihr eine, zwei, drei Nullen anhängen; z. B. $7 \times 10 = 70$, $128 \times 100 = 12800$.

Da $5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$ und $4 \times 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$ ist, so lassen sich die Faktoren verwechseln, und das Produkt ist ein Vielfaches von jedem derselben.

§. 16.

Jede Multiplikation ganzer Zahlen läßt sich zwar in eine wiederholte Addition des Multiplikands auflösen: da es aber zu beschwerlich seyn würde, eine Zahl (z. B. 1069) zwanzig-, dreißig-, hundertmal ꝛc. zu sich selbst zu addiren, so hat man eine leichtere Art der Multiplikation ausgedacht. — Weil nämlich jede Zahl, welche Faktor werden kann, aus den neun Zahlziffern mit der Nulle bestehen muß, so hat man nur die Produkte aus den neun Einheiten unter sich zu wissen nothwendig, um von was immer für zusammengesetzten Faktoren das Produkt zu finden. Diese Produkte sind in folgendem Täfelchen enthalten, welches der Pythagorische Rechentisch heißt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Der Gebrauch dieser Tabelle lehrt sich bei einer aufmerksamen Betrachtung selbst.

§. 17.

I. Soll die Summe von zwei oder mehreren Zahlen durch eine andere Zahl multiplizirt werden, was dadurch angezeigt wird, daß die Summanden in Klammern eingeschlossen werden, so kann man entweder jene Zahlen zuerst addiren, und dann ihre Summe multiplizіren, oder sie einzeln multiplizіren, und dann ihre Produkte addiren, weil es immer das nämliche Resultat geben muß,

ob man ein Ganzes als solches, oder in seinen einzelnen Theilen vermehrt.

Z. B. $(3+4)\times 5 = 7 . 5 = 35$ oder $(3+4)\times 5 = 15 + 20 = 35$.

II. Soll eine (ein- oder mehrzifferige) Zahl durch die Summe zwei oder mehrerer anderer multiplizirt werden, so multiplizirt man erstere durch die Summe oder einen jeden Summanden des zweiten Faktors einzeln. Dieß erhellt daraus, daß man die Faktoren eines Produkts verwechseln kann.

Z. B. $5\times(3+4) = 5 . 7$ oder $= 15 + 20 = 35$, weil $5\times(3+4) = (3+4)\times 5$.

III. Soll die Differenz zweier Zahlen mit einer dritten multiplizirt werden, so kann man vorher jene Zahlen subtrahiren, und dann den Rest multipliziren, oder zuerst Minuend und Subtrahend einzeln multipliziren, und dann ihre Produkte subtrahiren.

Z. B. $(8-5)\times 4 = 3\times 4 = 12$ oder $(8-5)\times 4 = 32 - 20 = 12$.

§. 18.

Aufgabe. Eine mehrzifferige Zahl durch eine zweite zu multipliziren,

a) wenn der Multiplikator nur eine Ziffer hat.

Auflösung. Man multiplizire jede Ziffer des Multiplikands, und schreibe die niedrigste Ziffer, d. h. die Einheiten (Einer-Stelle) des Produktes unter die Stelle, von der es herrührt; am Ende addirt man die einzelnen Produkte.

Operation: 1.069
6
―――――
54 Einer
36 . Zehner
60 . . Hunderter
―――――
6414

Man hat hier das Multiplikand 1069 in seine Einheiten der verschiedenen Ordnungen als Summanden aufgelöst, diese einzeln multiplizirt, und die einzelnen Produkte nach ihrer Gleichartigkeit addirt. Man hätte auch nachstehende Form wählen können.

$$1069\times 6 = (1000 + 60 + 9)\times 6 = 6000 + 360 + 54 = 6414.$$

In der Ausübung pflegt man die Addition Kürze halber gleich im Sinne zu verrichten; man schreibt nämlich von dem

zweizifferigen Produkte aus einer Ziffernstelle nur die letzte Ziffer (die Einheit) an, und rechnet den Zehner zum Produkte der nächsten Zifferstelle. Ist dieses 10, 20, oder 0, so kommt die hinüber gezählte Ziffer an die Stelle der Nulle.

Z. B.	1069 6	} Faktoren
	6414	Produkt.

b) wenn der Multiplikator mehrzifferig ist.

Auflösung. Man multiplizirt jede Ziffer des Multiplikands durch jede des Multiplikators; schreibt aber die Produkte aus den Einheiten, Zehnern, Hunderten ꝛc. auch als Einheiten, Zehner, Hunderter an. Man kann dann von der Rechten gegen die Linke, oder von der Linken gegen die Rechte multipliziren. Ist die eine Ziffer des Multiplikators eine Nulle, so schreibt man im Produkte nur eine Nulle an, und rückt das Produkt aus der folgenden Ziffer um eine Stelle höher, unter die Zeile, von der man zu multipliziren anfängt.

Aufgabe. 67.438×3.908.

Operation.

Erste Form.		Zweite Form.
67.438 3.908	} Faktoren	67.438 3.908
539504 6069420 202314		202314 606942 . . . 00 539504
263547704	Produkt.	263547704

Die Richtigkeit des angegebenen Verfahrens wird aus folgender Zergliederung des zweiten Faktors mit Berücksichtigung des oben unter a. und in §. 17. II. Angeführten erhellen.

$67.438 \times 3.908 = 67.438 \times (3000 + 900 + 8) = 202314000 + 60694200 + 539504 = 263547704.$

§. 19.

Von der Multiplikation durch die Tabelle — die man sich von dem größeren (oder kleineren) Faktor entwirft — stehe hier nur ein einziges Beispiel!

Man habe 7235×6895.

Auflösung.

I	Fache...	7235
II	—	14.470
III	—	21.705
IV	—	28.940
V	—	36.175
VI	—	43.410
VII	—	50.645
VIII	—	57.880
IX	—	65.115

Wenn ich nun aus dieser Tabelle das 5—90—800—6000 Fache addire, so habe ich das verlangte Produkt.

```
    36.175
   651.150
  5788.000
 43410.000
----------
49.885.325
```

Anmerkung. Bei dieser Art zu multipliziren gewinnt man nur dann an Zeit, wenn man das nämliche Multiplikand mit verschiedenen Faktoren — aber mit jedem zu einem eigenen Produkte — zu multipliziren hat.

§. 20.

I. Sind mehr als zwei Faktoren durch einander zu multipliziren, so sucht man zuerst das Produkt von zwei Faktoren, und multiplizirt das erste Produkt durch den dritten, dann durch den vierten, fünften Faktor u. s. w.

Z. B. 3. 5. 10. 8 = 15. 10. 8 = 150. 8 = 1200.

Es ist hier einerlei, welche Faktoren man zuerst oder zuletzt nehmen wolle.

II. Wenn das Multiplikand oder der Multiplikator selbst ein Produkt von mehreren Faktoren ist, so kann man, anstatt mit denselben auf einmal zu multipliziren, die Multiplikation mit den einzelnen Faktoren derselben nach und nach vornehmen. Dadurch läßt sich die Addition beseitigen, und somit die Rechnung etwas abkürzen, z. B.: 36. 43 = 43. 9. 4. = 387. 4. = 1548.

III. Wenn nun ein Multiplikand so in seinen Faktoren dargestellt wird, so wird dasselbe multiplizirt, wenn man nur einen Faktor desselben multiplizirt.

Z. B. 7 × (3. 2. 5. 9.) = 21. 2. 5. 9 = 3. 14. 5. 9 = 3. 2. 35. 9 = 3. 2. 5. 63.

§. 21.

Welches die natürlichste Probe der Multiplikation sey, wird später bei der Division vorkommen; hier etwas über die sogenannte

nannte Neunerprobe, welche von ihrer äußeren Form auch die Kreuzprobe heißt, aber nur bei der Multiplikation ganzer Zahlen angewendet werden kann. Man addirt nämlich sowohl im Multiplikand als Multiplikator die Ziffern Einheitsweise, wirft Neun hinweg, und multiplizirt den Rest aus dem Multiplikand durch jenen aus dem Multiplikator. Das Produkt wird wieder Einheitsweise addirt. Diese Summe muß der verjüngten Summe aus dem Hauptprodukte gleich seyn, wenn man es ebenfalls Einheitsweise addirt.

Z. B.

```
    3907
     503
   11721
  195350
1'965221
```

Probe.

```
 \ c) /
  \8 /
a) 1  8 b)
  /8 \
 / d) \
```

a) 3 + ~~9~~ + 0 + 7 = 1~~9~~

b) 5 + 0 + 3 = 8

c) 1 × 8 = 8

d) 1 + ~~9~~ + 6 + ~~5~~ + ~~2~~ + ~~2~~ + 1 = 8.

Diese Probe gewährt nur eine Wahrscheinlichkeit; denn sie würde auch der Form nach richtig seyn, wenn man im Produkte um Neun rc. gefehlt hätte.

§. 22.

Rechnungsvortheile bei der Multiplikation ganzer Zahlen.

I. Die Multiplikation mit dem Faktor 11 läßt sich dadurch verrichten, daß man unter das Multiplikand dieses um eine Stelle vorwärts gerückt schreibt, oder so geschrieben denkt, und dann addirt. Z. B. 67 × 11 = 737, nämlich

```
 67
67
737
```

oder 13967 × 11 = 153637.

Hieraus, und aus §. 20. I. wird man Folgendes verstehen:

97 × 77 = 97.11.7 = 1067.7 = 7469.

108 × 66 = 1188 × 6 = 7128.

II. Anstatt mit 9, 99, 999 (oder auch 8, 98, 998 u. s. w.) zu multipliziren, multiplizirt man kürzer mit der nächsten Rundezahl von 10, 100, 1000, d. i. hängt dem Multiplikand 0, 00, 000 an,

und zieht dann von diesem Produkte das Ein- (oder Zwei)fache des Multiplikands ab; denn

10 — 9, 100 — 99, 1000 — 999 = 1.
10 — 8, 100 — 98, 1000 — 998 = 2.

Folglich M × 9 = M. (10 — 1).
M × 8 = M. (10 — 2) u. s. w.

Beispiele:

1) 1894 × 99 = 189.400. (Hundertfaches Multiplikand)
— 1.894. (Einfaches Multiplikand)
187.506. (Wahres Produkt).

2) 36095 × 998 = 36095000 (Tausendfaches)
— 72190 (Zweifaches Multiplikand)
36022810 (Wahres Produkt).

* Wäre der Faktor 89, 989 u. s. w., so müßte man das Eilffache des Multiplikandes abziehen; denn

100 — 89 = 1000 — 989 = 11.

3) 1576 × 989 = 1576000 — 17336
= 1,558.664 wahres Produkt.

III. Wenn der Multiplikator aus drei oder mehr Ziffern besteht, und zwei oder mehr unmittelbar aufeinander folgende ein Produkt einer vorhergehenden Ziffer des Multiplikators sind, so läßt sich ein Partialprodukt ersparen, und die Rechnung abkürzen.

In dem Beispiele 1529 × 568 sieht man, daß im Multiplikator 568 die Stellen 56 das Siebenfache von 8 sind; also

```
  1529
   568
------
 12232
 85624*
------
868472
```

* Hier wurde das Achtfache des Multiplikands gleich mit 70 multiplizirt.

In dem Beispiele 5432 × 432728 enthält der Multiplikator die Faktoren 72 = 9.8 und 432 = 6.72; also

```
      5432
    432728
----------
     43456
    391104
   2346624
----------
2350578496.
```

IV. Sind sehr große Zahlen zu multipliziren, und will man nur einen Näherungsweg des Produktes, d. i. nur die höchsten bedeutsamen Ziffern desselben und ihren Lokalwerth erfahren, so multiplizire man nur die höchsten zwei oder drei Ziffern des einen Faktors mit zwei oder drei Ziffern des andern, und ergänze die fehlenden Stellen durch so viele Nullen, als wie viel Ziffern in beiden Faktoren unberücksichtigt bleiben.

Z. B. 37156734 × 68207594 annähernd = 37000000 × 68000000 = 2516″000,000′000,000.

IV. Division und Theilbarkeit der Zahlen.

§. 23.

I. Eine Zahl (z. B. 54) durch eine zweite (z. B. 9) dividiren, heißt von der ersten Zahl die zweite so oft hinwegnehmen, als diese in jener enthalten ist; oder aus zwei gegebenen Zahlen eine dritte finden, welche anzeigt, wie oft die eine in der anderen enthalten ist.

$$54:9 \text{ oder } \frac{54}{9} = 6.$$

Denn $54 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 9 \times 6$.

II. Die Zahl, welche dividirt werden soll, heißt das Dividend; womit man dividirt, der Divisor, und die dritte Zahl, welche anzeigt, wie oft dieser in jenem enthalten ist, heißt der Quotus oder Quotient. Bei dem Zeichen (:) muß das Dividend immer voraus, der Divisor nach, bei dem Querstriche ersteres oberhalb, letzteres unterhalb gesetzt werden. Die angezeigte Division 54:9 oder $\frac{54}{9}$ heißt ebenfalls (formeller) Quotient. — Bei ganzen Zahlen ist die Division eine abgekürzte Subtraktion; denn der Quotient 6 gibt an, daß der Divisor vom Dividend 6 mal hinweggenommen werden könne.

III. Die Division ist ganz der Gegensatz der Multiplikation: erstere vereinfacht und löset auf, was die zweite vervielfacht und vereiniget hat. Das Dividend stellt nämlich das Produkt vor, dessen Faktoren der Divisor (und zwar der bekannte) — und der Quotient sind (letzterer als unbekannter Faktor).

IV. Die Multiplikation und Division dienen sich also gegenseitig zur Probe. — Nämlich die Multiplikation wird geprüft,

indem man das Produkt durch einen Faktor dividirt, worauf der andere als Quotus erscheint; z. B.

$$6 \times 7 = 42.$$
$$42 : 7 = 6$$
$$42 : 6 = 7$$

Die Division aber wird geprüft durch die Multiplikation, indem man den Divisor mit dem Quotus multiplizirt, welches zum Produkt das Dividend gibt; z. B.

$$48 : 6 = 8;$$
folglich $6 \times 8 = 48$.

V. Jede Zahl ist in sich selbst 1mal enthalten, z. B. $8 : 8 = 1$; $8 \times 1 = 8$; daher 1 in jeder Zahl so oft, als wie viele Einheiten diese enthält; z. B. $8 : 1 = 8$.

VI. Rücksichtlich der Division einer Summe oder Differenz von zwei Zahlen durch eine dritte Zahl gilt das Nämliche, was bei der Multiplikation §. 17. I. und III. angegeben worden ist. Z. B. $(12+8) : 4 = 20 : 4 = 5$ oder $(12+8) : 4 = 3+2 = 5$
$(21-6) : 3 = 15 : 3 = 5$ oder $(21-6) : 3 = 7-2 = 5$.

§. 24.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl durch eine einzifferige andere Zahl zu dividiren.

Auflösung. Man schreibe den Divisor entweder zur Linken des Dividends durch einen Strich getrennt, oder in Klammern eingeschlossen unter die erste Ziffer des Dividends; sollte diese kleiner seyn, als der Divisor, unter die zweite Ziffer desselben. Suche dann im pythagorischen Rechentische oder Einmal Eins ein solches Vielfaches des Divisors, das der ersten Ziffer oder den beiden ersten Ziffern des Dividends gleich oder zunächst kleiner ist. Die Ziffer, welche anzeigt, was für ein Vielfaches jenes sey, wird zur Rechten des Dividends, von diesem durch einen vertikalen Strich getrennt, als höchste Ziffer des Quotienten angeschrieben, jenes Vielfache von der ersten Ziffer oder den beiden ersten Ziffern des Dividends abgezogen. Die erste Ziffer des Quotienten wird denselben Lokalwerth haben, welchen der erste Theil des Dividends, in den dividirt worden ist, hat. Zu dem Reste setze man die nächste Ziffer des Dividends, und nach der zweiten Methode den Divisor darunter, suche von dem so vermehrten Reste das gleiche oder zunächst kleinere Vielfache, und

ziehe es davon ab. Die Zahl, welche dieses Vielfache anzeigt, schreibe man nach der ersten Ziffer des Quotienten, und setze zum Reste die nächstfolgende Ziffer des Dividends herab. Mit dieser Operation fahre man fort, bis alle Ziffern des Dividends herabgesetzt sind. Bleibt einmal kein Rest, und ist in der herabgesetzten Ziffer des Dividends der Divisor nicht enthalten, so schreibt man dafür im Quotienten eine Nulle, und nimmt zum vorigen Theile des Dividends noch die nächstfolgende Ziffer.

Beispiele.

```
1) 1728 | 216        2) 5 | 6045 | 1209
   (8)  |                 | 5    |
   16                     ----
   ----                    10
    12                     10
   (8)                    ----
   ----                     45
    48                      45
   (8)                    ----
    48                       0
   ----
     0
```

Zergliederung der Rechnung im ersten Beispiele (vergl. §. 23. VI.)

```
8 | 1700 + 20 + 8        | 200
  | 1600                 |  10
  -------------          |   6
    100 + 20 = 120       -----
               80        | 216
             ------------|
             40 + 8 = 48 |
                      48 |
                    ---- |
                       0 b
```

§. 25.

Aufgabe. Eine Zahl (z. B. 17.280) durch einen mehrzifferigen Divisor (z. B. 36) zu dividiren.

Auflösung.

I. Man setze den Divisor (36) so unter die ersten zwei oder drei Zifferstellen des Dividends, daß er wenigstens einmal darin enthalten ist, und erforsche den Quotus, oder wie oft der Divisor hier könne abgezogen werden; um dieß zu erfahren, dividirt man zwar nur mit der ersten Ziffer des Divisors, man muß aber auch auf die zweite, oder die nachfolgenden Ziffern Rücksicht nehmen, damit man den Quotus nicht zu hoch anrechne. 3 wäre in 17 fünfmal enthalten, aber 5 mal 36 ist 180, kann also nicht von 172 abgezogen werden; deßwegen ist der Quotus nur 4 (dieser wird beiseite geschrieben). Nun multiplizirt man mit dem

Quotus 4 den ganzen Divisor 36. —36×4=144. Das Produkt wird angeschrieben, darunter ein Strich gezogen, und von den oben stehenden Ziffern des Dividends subtrahirt. Rest 28.

II. Zum Reste (28) wird eine neue Zifferstelle (8) herabgesetzt, und der Divisor darunter. Nun dividirt man auf ein Neues: 3 in 28 geht hier nur 8 mal. Der Quotus 8 wird beiseite (nach 4) geschrieben; damit der Divisor 36 multiplizirt, und das Produkt nach einem gezogenen Striche von den über ihm stehenden Stellen des Dividends abgezogen. Rest = 0.

III. Die Nulle, als letzte Zifferstelle des Dividends, wird auch im Quotus angesetzt, und macht also 48 (Einheiten) zu Zehnern.

```
Operation.  17.280 | 480.          Zergliederung.
             36    |           36 | 17280 | 400
            144 —  | —            | 14400 |  80
            ------                | ----- | ---
             2 88  |              |  2880 | 480
               36                 |  2880 |
             2 88                 | ----- |
            ------                |     0 |
                0
```

§. 26.

Andere Regeln zur Vermeidung der Fehler im Dividiren.

I. Der Divisor kann in einer Stelle des Dividends, wenn auch gleich zwei Ziffern auf einmal dividirt werden müssen, höchstens nur 9mal enthalten seyn. Wenn man nun zum Quotient 10, 11 bekäme, so wäre dieß ein Zeichen, daß man in der vorhergehenden Zifferstelle den Quotus zu niedrig angesetzt habe.

II. Daß der Quotus zu hoch angerechnet worden, erkennt man daraus, wenn sich das Produkt aus diesem Quotus und dem Divisor von den treffenden Zifferstellen des Dividends nicht abziehen läßt.

III. Wie viele Zifferstellen der Quotus erhalten müsse, erkennt man leicht, sobald nur der Divisor so unter das Dividend gesetzt worden, daß er darin wenigstens einmal enthalten ist. Je nachdem nun die niedrigste oder letzte Zifferstelle des Divisors unter den Tausendern, Hundertern, Zehnern, Einheiten des Dividends steht, so muß der Quotus aus 4, 3, 2, 1 Zifferstelle bestehen.

IV. So oft eine neue Zifferstelle herabgesetzt wird, muß auch im Quotus eine Ziffer angeschrieben werden. Sollte man nicht dividiren können, weil das Dividend kleiner ist als der

Divisor, so wird im Quotus eine Nulle angesetzt, und eine neue Zifferstelle aus dem Dividend herabgeschrieben.

V. Bleibt am Ende der Divison ein Rest (d. h. geht die Division nicht rein auf), so wird der Divisor auch unter diesen Rest, nach einem dazwischen gezogenen Striche, gesetzt, zum Zeichen, daß auch dieser Rest noch zu theilen sey.

VI. Hat man einmal im Dividiren eine Fertigkeit erlangt, so schreibt man den Divisor nur seitwärts vor das Dividend hin, und setzt ihn im Sinne unter die herabgeschriebenen Zifferstellen des letztern.

VII. Anfängern möchte es räthlich seyn, die Division durch eine entworfene Tabelle der Vielfachen des Divisors, mittelst einer bloßen Subtraktion zu verrichten, nach folgendem Muster; z. B.

3'896.991 : 1.827.

Operation.

3'896.991	Quotus
—3 654	2133
2429	
—1827	
6029	
—5481	
5481	
—5481	
0	

Tabelle des Divisors.

I	Faches.	1.827
II	—	3.654
III	—	5.481
IV	—	7.308
V	—	9.135
VI	—	10.962
VII	—	12.789
VIII	—	14.616
IX	—	16.443

Anmerk. Das angegebene Verfahren ist sowohl zur Vermeidung der Fehler, als auch zur Abkürzung der Rechnung dann besonders zu rathen, wenn für mehrere Divisionsbeispiele die nämliche Zahl als Divisor gegeben ist. — Vergl. §. 19.

§. 27.

Aufgabe. Die Division durch die Multiplikation zu prüfen.

Auflösung. Man multiplizire den Quotus mit dem Divisor, und addire zum Produkte den allenfalls gebliebenen Rest, so ergibt sich das Dividend (§. 23. IV.); z. B.

1) 17280 : 36 = 480 (Sechs und dreißiger).

Probe. 36×480 = 17.280.

Operation.

480
36
2880
144
17.280

2) 4937 : 25 =

```
25 | 4397 | 197 12/25      Probe.  197
   | 25   |                         25
   ------                        -----
     243  |                        985
     225                           394
    ----                         -----
     187                          4925
     175                           +12
    ----                         -----
      12 Rest.                   4.937.
```

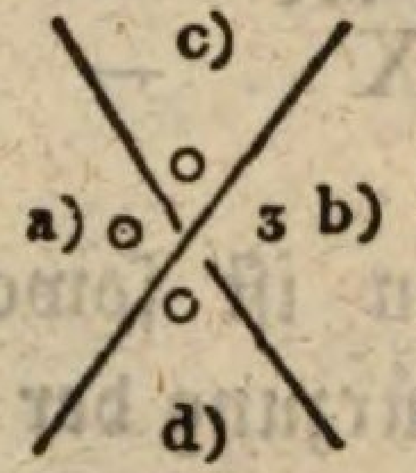
Anmerkung. Der Quotus 197 bedeutet 25ger; durch die Multiplikation mit 25 wird also 197 erst in einfache Einheiten aufgelöset, und gleichartig mit dem Reste 12, welcher ebenfalls einfache Einheiten bedeutet.

$\frac{12}{25}$ spricht man: 12 fünf und zwanzigste Theile.

§. 28.

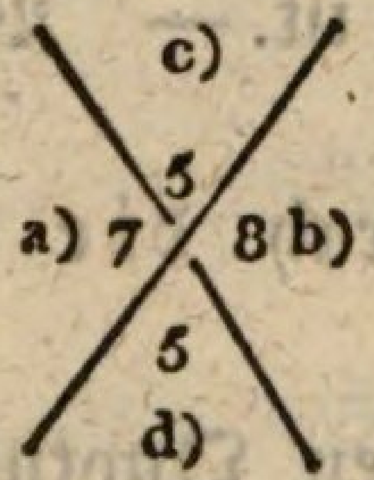
Ueber die Division läßt sich auch die §. 21. angezeigte Kreuzprobe anwenden, wenn man das Dividend als das Produkt, den Divisor aber und Quotus als seine Faktoren betrachtet. Nur muß man zum Produkte aus den verjüngten Summen des Divisors und Quotus den allenfallsigen Rest addiren; z. B.

I. 17280 : 36 = 480.

Probe. 

a) 3 + 6 = ø + ø
b) 4 + 8 = ø + 3
c) 3 × 0 = 0
d) 1 + 7 + 2 + 8 = ø + ø + 0.

II. 4.937 : 25 = 197 $\frac{12}{25}$.

Probe. 

a) 2 + 5 = 7
b) 1 + ø + 7 = 8 + ø
c) 7 × 8 = 56, 5 + 6 = 11, 11 + 12 = 23 = 2.ø + 5
d) 4 + 9 + 3 + 7 = ø + ø + 5.

§. 29.

Aufgabe. Die Multiplikation durch die Division zu prüfen.

Auflösung. Man dividire das Produkt durch den einen Faktor, worauf der andere Faktor als Quotus erscheint. Wurden mehr als zwei Faktoren durcheinander multiplizirt, so bringt man sie erst auf zwei, indem z. B. alle Faktoren, bis auf einen, in ein Produkt multiplizirt, und als ein Mitfaktor angesehen werden.

Z. B. 1°) . . $129 \times 128 = 16.512$.

Probe.			oder:		
	16512	129.		16512	128.
	128			129	
	371			361	
	128			129	
	256			258	
	1152			1032	
	128			129	
	1152			1032	
	0			0	

2°) Man multiplizire $11 \times 3 \times 7 \times 8$.
Produkt $= 1.848$.

Probe. $3.7.8 = 21.8 = 168$. (Produkt der letzten 3 Faktoren.)

1.848	11 erster Faktor.
168 —	—
168	
168	
0	

§. 30.

Aus dem Vorausgegangenen ergibt sich:

I. Der Quotus wird um so vielmal größer, um wie vielmal größer bei einerlei Divisor das Dividend, oder um wie vielmal kleiner bei einerlei Dividend der Divisor wird; z. B.

24	: 12 = 2.	und :	48	: 24 = 2.
48	: 12 = 4.			: 12 = 4.
72	: 12 = 6.			: 6 = 8.

II. Der Quotus wird um so vielmal kleiner, um wie vielmal kleiner entweder bei einerlei Divisor das Dividend, oder größer bei einerlei Dividend der Divisor wird; z. B.

48	: 2 = 24.	und :	48	: 2 = 24.
24	: 2 = 12.			: 4 = 12.
12	: 2 = 6.			: 8 = 6.
6	: 2 = 3.			: 16 = 3.

III. Der Quotus bleibt unverändert, wenn man Divisor und Dividend mit der nämlichen Größe multiplizirt oder dividirt.

Z. B. $24 : 8 = 24.2. : 8.2. = 24.3. : 8.3 = 3$.

$$\frac{24}{2} : \frac{8}{2} = \frac{24}{4} : \frac{8}{4} = \frac{24}{8} : \frac{8}{8} = 3.$$

IV. Anstatt mit dem ganzen Divisor auf einmal das gegebene Dividend zu dividiren, kann man die Division mit den ein-

zelnen Faktoren des Divisors, wenn dieser ein Produkt ist, nach und nach verrichten; z. B.

$$1728 : 24 = 1728 : 4.\ 6.$$

$$\left.\begin{array}{r} 1728 : 6 = 288 \\ 288 : 4 = 72 \end{array}\right\} 1728 : 24 = 72.$$

V. Wenn nun ein Dividend, so in seine Faktoren zerlegt, dividirt werden soll, so geschieht diese Division, wenn nur Ein Faktor desselben dividirt wird; z. B.

$$\frac{5.\ 7.\ 8.\ 9.}{4} = 5.\ 7.\ 2.\ 9.$$

§. 31.

Rechnungsvortheile bei und mit der Division ganzer Zahlen.

I. Sind im Dividend und Divisor Nullen gegeben, so streiche man von jedem gleichviel aus. Z. B. 288000 : 9600 = 2880 : 96 = 30. Sind bloß im Divisor Nullen, so streicht man diese und auch im Dividend eben so viele Ziffern ab; dem Reste werden aber letztere wieder beigesetzt.

```
24(00 | 637(25 | 26
      | 48
      | ---
      | 157
      | 144
      | ---
        13
```

Rest 1325, Quotus $26\frac{1325}{2400}$.

II. Anstatt durch 5, 25, 125 eine Zahl (z. B. 997) zu multipliziren, hängt man dem Multiplikand 0, 00, 000 an, und dividirt dann durch 2, 4, 8.

Denn $\frac{10}{2} = 5.$ $\frac{100}{4} = 25.$ $\frac{1000}{8} = 125.$

Also: $997 \times 5 = \frac{9.970}{2} = 4985.$

$$997 \times 25 = \frac{99.700}{4} = 24.925.$$

$$997 \times 125 = \frac{997.000}{8} = 124.625.$$

III. Anstatt eine Zahl durch 9, 99, 999 (oder 8, 98, 998) zu dividiren, dividirt man mit der nächsten Rundezahl von 10, 100, 1000. Am Ende aber muß man das Einfache (Zweifache) des Quotus immer wieder zum Reste addiren, und auf ein Neues dividiren. — Der Grund dieses Verfahrens ist aus §. 22. II., und aus dem Begriffe der Division als Gegensatz der Multiplikation unschwer abzunehmen.

Z. B. 1°) 970.299 : 99.

Operation. 9702|99_ | _9702
1 |00
Rest 99 b
I. Quot. +9702

98|01_ | _ 98
1 |00
Rest 1 b
II. Quot. +98

99 : 99 = 1
9801 ganzer Quotus.

2°) 941.192 : 98 = 941|92 { 94.11
1 |00 { 189
9411 × 2 = 18.822 3
92 + 18822 = 189|14 1
189 × 2 = 3 78 9.604 ganzer Quotus.
14 + 378 = 3|92
3 × 2 = 6
98 : 98 = 1

3°) 978121 : 989 = 978|121 { 978
1 |000 { 10
978 × 11 = 10.758 1
10|879 989 ganzer Quotus.
10 × 11 = |110
989 : 989 = 1.

IV. Ist der Divisor ein- oder zweizifferig, so kann auch **aufwärts dividirt** werden. Bei dieser Methode werden die Vielfachen des Divisors im Gedanken abgezogen, und nur die erhaltenen Reste über jene Ziffern des Dividends, von welchen man abgezogen hat, geschrieben.

Beispiele: 3654016 : 4 und 9261 : 21

x2 x
4 | ~~3654016~~ ↓ 913504 (b) 21 | ~~9261~~ ↓ 441 (b)

84 (über 9261)

Bei mehrzifferigen Divisoren ist diese Divisionsart nicht zu empfehlen.

§. 32.

I. Eine Zahl ist durch eine andere ohne Rest **theilbar**, wenn sie ein Vielfaches derselben ist. Z. B. 1728 ist durch 144 theilbar, weil 1728 = 144.12. Ist eine Zahl nur durch 1 oder sich selbst theilbar, so heißt sie (absolute) **Primzahl**; ist sie auch durch eine andere theilbar, so heißt sie **zusammengesetzt**; ist

sie insbesondere durch 2 theilbar, so heißt sie gerade, im Gegentheile ungerade. Die ersten Primzahlen sind: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 . . . ; gerade Zahlen sind 2, 4, 6, 8 und alle mit einer dieser Ziffern oder mit 0 sich endigenden Zahlen; ungerade Zahlen sind: 1, 3, 5, 7, 9........

Eine Zahl ist theilbar

a) durch 2, wenn sie gerade ist;

b) durch 3 oder 9, wenn die Quersumme ihrer Ziffern durch 3 oder 9 theilbar ist, z. B. 3504 ist theilbar durch 3, weil es $3+5+0+4=12$ ist; 4536 ist theilbar durch 9, weil es $4+5+3+6=18$ ist;

c) durch 4, wenn ihre zwei letzten Ziffern es sind, z. B. 1724 ist theilbar durch 4, weil 4 in 24 enthalten ist;

d) durch 5, wenn sie sich auf 5 oder 0 endigt, z. B. 1610 und 375;

e) durch 6, wenn sie zugleich durch 2 und 3 theilbar ist, z. B. 1236;

f) durch 8, wenn die drei letzten Ziffern es sind, z. B. 26024;

g) durch 10, 100, 1000 u. s. w., wenn sie sich auf 1, 2, 3.... Nullen endigt.

II. Sind zwei Zahlen durch die nämliche dritte Zahl theilbar, oder haben sie einen gemeinschaftlichen Theiler, so heißen sie zusammengesetzt unter sich, außerdem Primzahlen unter sich. Die Zahlen 15 und 20 sind zusammengesetzt unter sich, weil beide durch 5 theilbar sind; 15 und 28 sind Primzahlen unter sich, weil sie keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Ist eine Zahl durch zwei andere Zahlen, welche Primzahlen unter sich sind, theilbar, so ist sie es auch durch das Produkt dieser beiden Zahlen. Z. B. 3024 ist theilbar durch $9\times4=36$, weil es durch 9 und 4 theilbar ist. Vergl. oben e.

III. Für zwei zusammengesetzte Zahlen unter sich ist diejenige Zahl das größte gemeinschaftliche Maß, durch welche dividirt dieselben Primzahlen unter sich werden.

§. 33.

Aufgabe. Für zwei gegebene Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß zu finden.

Auflösung. Man dividire mit der kleineren Zahl in die größere, dann mit dem Reste in den vorigen Divisor, und so

immer mit dem letzten Reste in den zunächst vorausgegangenen Divisor, bis entweder die Division sich aufhebt oder 1 zum Reste gibt. Im ersten Falle ist der letzte Divisor das größte gemeinschaftliche Maß, im zweiten sind die gegebenen Zahlen Primzahlen unter sich.

Beispiele und Beweis.

I. Es seyen die gegebenen Zahlen 174 und 377.

174	377	2	
	348		
	29	174	6
		174	
		0	

Eine Zahl (29) ist nicht nur in ihrem Vielfachen (174 = 29.6), sondern auch in der Summe von zwei solchen Vielfachen, also in der Summe von ihrem Vielfachen und ihr selbst enthalten; daher muß auch ein Rest (29), welcher im Divisor enthalten ist, im Dividend (377 = 2.174 + 29 = 2.6.29 + 29) aufgehen. Es ist 29 für 174 und 377 gemeinschaftliches Maß, und zwar größtes, weil die Quotienten 174:29 = 6 und 377:29 = 13 Primzahlen unter sich sind.

II. Die gegebenen Zahlen seyen 215 und 417.

215	417	1					
	215						
	202	215	1				
		202					
		13	202	15			
			13				
			72				
			65				
			7	13	1		
				7			
				6	7	1	
					6		
					1	6	6
						6	
						0	

215 und 417 haben nur 1 als gemeinschaftliches Maß, sind also Primzahlen unter sich.

II. Hauptstück.

Von den Stammrechnungsarten mit ganzen benannten Zahlen.

Vorbegriffe und Vorübungen.

§. 34.

Die Rechnungen mit benannten Zahlen (vergl. §. 2.) unterscheiden sich nicht wesentlich von denen mit unbenannten Zahlen. Nur muß man vorerst die Gesetze kennen, nach welchen jene Gegenstände des bürgerlichen Lebens, auf welche sich die Rechnungen beziehen, nämlich Maße, Gewichte, Münzen u. s. w., in höhere und niedere Einheiten abgetheilt sind, da diese Gesetze der Abtheilung mit denen der unbenannten Zahlen bei uns nur bei dem geometrischen Fußmaße übereinstimmen, d. i. nur dieses allein nach dem Dezimalsysteme sich richtet. Das Nöthige hierüber ist in den am Ende beigefügten Tabellen, I. u. II. Abtheilung, zu finden.

Bei allen Rechnungen mit benannten Zahlen kann das Reduziren oder Resolviren nothwendig seyn; die Anleitung hiezu muß daher vorangehen.

Benannte Zahlen reduziren oder auf größern Namen bringen heißt, Zahlen oder Einheiten einer niedrigeren Ordnung auf Einheiten einer höheren Ordnung bringen (z. B. Kreuzer auf Gulden). Hingegen Einheiten einer höheren Ordnung in die enthaltenen Einheiten einer niedrigeren Ordnung verwandeln (z. B. Zentner in Lothe), heißt resolviren. Das Erste geschieht durch die Division, das Zweite durch die Multiplikation.

Jene Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten einer niedrigeren Ordnung eine Einheit der höheren geben, heißt die Reduktions- oder Auflösungszahl; z. B. ist für Zentner und Lothe die Reduktionszahl 3200, weil 3200 Lothe = 1 Zentner sind.

§. 35.

Aufgabe. Benannte Zahlen zu resolviren.

Auflösung. 1) Man multiplizirt die höhere Ordnung mit der Auflösungszahl der nächst niedrigeren, oder sogleich der niedrigsten Ordnung, in welche man resolviren will. Denn da Resolviren nichts anders heißt, als eine gegebene Anzahl größerer Theile

durch die darin enthaltenen kleineren Theile ausdrücken, so muß man für jeden größeren Theil so viel kleinere nehmen, als jener von diesen enthält, was durch die Multiplikation erhalten wird.

2) Besteht das zu resolvirende Ganze selbst aus mehreren Unterabtheilungen, so wird die höchste Ordnung mit der Auflösungszahl der nächst niedrigeren multiplizirt, und zum Produkte werden die schon gegebenen Einheiten, welche mit der vorigen Auflösungszahl gleichen Namen haben, sogleich im Sinne hinzugezählt.

Anmerkung. In Beziehung auf Längen-, Flächen- und Körpermaße hat man die abkürzende Bezeichnung eingeführt, daß man Ruthen, Fuße, Zolle, Linien durch die zur Rechten über die Zahlen gesetzten Zeichen °, ′, ″, ‴ ausdrückt, und das Wort Quadrat mit □, Kubik durch c bezeichnet. Z. B.

3° 5′ 6″ 7‴ bedeutet: 3 Ruthen 5 Fuß 6 Zoll 7 Linien;
35□′ 80□″ bedeutet: 35 Quadratfuß 80 Quadratzoll;
54 c′ 312 c″ bedeutet: 54 Kubikfuß 312 Kubikzoll.

Beispiele. I. Wie viele Pfunde, Lothe, Quintel sind in 6 Zentnern enthalten.

Operation. 6 Ztr. × 100 = 600 ℔.
600 Pfd. × 32 = 19200 Loth.
19200 Loth × 4 = 76800 Quintel.

II. Wie viele Kreuzer, Pfennige, Heller enthält ein bayerischer Kronthaler?

Operation.

a)	b)	c)
2 fl. 42 kr.	162 kr.	648 pf.
60	4	2
120	648 pf.	1296 hl.
42		
162 kr.		

III. Es sollen 3° 4′ 7‴ (Dec.M.) in Linien resolvirt werden. Antw. 3407‴.

IV. Es sind 36□° 25□′ 9□″ dc. = 362509□″
36□° 26□′ 9□″ ddc. = 750249□″.

V. Wie viele Kubiklinien sind in 3 Kubikfuß, 9 Kubikzoll (Duodec.M.) enthalten?

Antw. 3 c′ 9 c″ dd = 8′973504 c‴.

Anmerkung. Bei dem Resolviren ist die Vermehrung nur scheinbar, indem bloß der Umfang, nicht aber der Werth des Ganzen vergrößert wird; denn 3 fl. sind nicht mehr als 180 kr. = $\frac{180}{60}$ fl.

§. 36.

Aufgabe. Benannte Zahlen zu reduziren.

Auflösung. Das Reduziren ist dem Resolviren gerade entgegengesetzt. Man dividirt daher die niedrigeren Einheiten durch die Reduktionszahl der nächst höheren Ordnung. Der Rest zeigt Einheiten der niedrigeren, der Quotient Einheiten der nächst höheren Ordnung an. Letztere werden dann auf die nämliche Art auf die darin enthaltenen höheren Ordnungen zurückgeführt. Reduziren heißt nämlich eine gegebene Anzahl kleinerer Theile durch die darin enthaltenen größeren darstellen, also für jedes Vielfache von jenen, welches einem größeren Theile gleich ist, einen solchen nehmen, und dieß wird durch die Division erhalten; der Rest aber muß nothwendig die Beschaffenheit des Dividends behalten.

Beispiele.

I. Wie viele fl., kr., pf., hl. stecken in 123005 hl.?

Operation. 123005 hl. : 2 = 61502 pf. 1 hl.
61502 pf. : 4 = 15375 kr. 2 pf.
15375 kr. : 60 = 256 fl. 15 kr.

Also 123005 hl. = 256 fl. 15 kr. 2 pf. 1 hl.

II. Wie viele Kubikruthen, Kubikfuß, Kubikzoll, Kubiklinien sind in 13.456'978.340 Kubiklinien (Decim. Maß) enthalten?

Operation. Da die Reduktionszahl durchaus 1000 ist, so kann die Reduktion durch ein bloßes Abschneiden von je drei Ziffern von der Rechten gegen die Linke geschehen; also

13 456 978 340 c‴ = 13 c° 456 c′ 978 c″ 340 c‴

Auf gleiche Weise sind:

3 67 49 08 □‴ dec. = 3 □°, 67 □′, 49 □″, 8 □‴.

I. Addition.

§. 37.

Aufgabe. Benannte Zahlen verschiedener Ordnungen zu addiren.

Auflösung. Man sortirt die Summanden, d. h. setzt gleichartige Sorten unter gleichartige. Gleichartig sind aber

benannte

benannte Zahlen, wenn sie dieselbe Benennung haben, wenn sie gleichbenannt sind. Die Addition beginnt dann bei der niedrigsten Sorte. Enthält die Summe derselben schon Einheiten der nächst höheren Ordnung, so werden sie durch die Reduktion herausgefunden, und zur Summe der nächsten Sorte hinübergezählt. — So rückt man nun bis zur höchsten oder letzten Sorte vor, bei welcher keine fernere Reduktion nothwendig ist.

Beispiele.

I. Die Summe folgender Geldposten zu finden.

	229 fl. +	35 kr. +	2 pf. +	1 hl.
	149	28	3	1
	520	49	3	1
	99	16	2	—
	997	128	10	3
Summe =	999 fl.	10 kr.	3 pf.	1 hl.

* Das Additionszeichen, wodurch die Glieder eines Summands verbunden sind, wird gewöhnlich nicht angeschrieben.

II.	15 Jahre	10 Monate	20 Tage	10 Stunden
	28	11	27	23
	14	9	21	22
	12	5	18	19
Summe =	72 J.	1 M.	29 T.	2 St.

III. Es zählte im Monat April 1841 Oberbayern 690492, Niederbayern 522118, Pfalz 579120, Oberpfalz und Regensburg 457608, Oberfranken 486222, Mittelfranken 511937, Unterfranken und Aschaffenburg 579279, Schwaben und Neuburg 544201 Einwohner; wie viel ganz Bayern? Antw. 4370977.

IV. Bei einem Baue erhielten die Maurer 845 fl. 36 kr. 2 pf., die Zimmerleute 632 fl. 45 kr. 3 pf., die Schreiner 419 fl. 18 kr., die Schlosser 194 fl. 54 kr. 2 pf., der Glaser 94 fl. 20 kr., der Hafner 86 fl. 19 kr. 3 pf. Was betrug der ganze Arbeitslohn? Antw. 2273 fl. 14 kr. 2 pf.

V. Es soll eine Kiste gefertigt werden, welche so viel faßt, als vier andere zusammengenommen. Wenn nun die erste 8 c′ 358 c″ 1634 c‴ dd., die zweite 7 c′ 952 c″ 748 c‴, die dritte 12 c′ 1716 c″ 500 c‴, die vierte 6 c′ 1218 c″ 935 c‴ hält; wie viel muß die anzufertigende Kiste fassen? Antw. 35 c′ 790 c″ 361 c‴ dd.

VI. Ein Kaufmann hatte zwei Waaren-Lieferungen erhalten, die erste verkaufte er um 320 fl. 30 kr. und verlor dabei 12 fl. 34 kr.; eine zweite hatte er um 482 fl. 14 kr. 2 pf. gekauft und verkaufte sie mit einem Gewinne von 36 fl. 39 kr. 3 pf. Wie theuer hat er die erste Lieferung gekauft, wie theuer die zweite verkauft? Antw. Die erste hat er um 333 fl. 4 kr. gekauft; die zweite um 518 fl. 54 kr. 1 pf. verkauft.

II. Subtraktion.

§. 38.

Aufgabe. Benannte Zahlen zu subtrahiren.

Auflösung. 1) Man sortirt die Ordnungen des Minuends und Subtrahends, und zieht die des Letzteren von jenen des Ersteren, von der niedrigsten Sorte angefangen, der Reihe nach ab.

2) Kann man bei einer Sorte im Minuend nicht abziehen, so borgt man bei der nächst höheren Ordnung eine Einheit, und löset sie in Theile der niedrigeren Sorte auf, welche man dann zu den schon vorhandenen addirt.

3) Manchmal fehlen im Minuend die niedrigeren Ordnungen ganz; man borgt dann eine Einheit der höchsten Ordnung, und repartirt sie so unter die fehlenden Sorten, daß man überall abziehen kann.

Beispiele. I. Von 25 fl. 36 kr. 3 pf. 1 hl. wurden ausgegeben 12 fl. 48 kr. 2 pf. Was ist der Rest?

Operation.

	25 fl.	36 kr.	3 pf.	1 hl.
	— (12	48	2	—)
Rest =	12 fl.	48 kr.	1 pf.	1 hl.

Probe durch die Addition.

25 fl. 36 kr. 3 pf. 1 hl.

II. Von 16 Zentnern Kaffee wurden 13 Ztr. 49 Pfund 30 Loth 3 Quint verkauft; wie viel ist noch übrig?

Operation.

	1'6 Ztr.	99 — Pfund	31 — Loth	4 — Qtl.
	— (13	49	30	3)
Rest =	2 Ztr.	50 Pfund	1 Loth	1 Qtl.

III. A hatte dem B einen Kronenthaler geliehen. Dieser gab Jenem später zur Abtragung seiner Schuld einen Vereinsthaler; wie viel muß A darauf zurückgeben? Antw. 48 kr.

IV. In einer Kanzlei waren 3 Ballen Papier angekauft worden; nach einiger Zeit fand man noch 1 Ballen 4 Ries 12 Buch 18 Bogen vorräthig. Wie viel Papier ist während jener Zeit gebraucht worden? Antw. 1 B. 5 R. 7 Buch 6 Bogen.

V. Jemand besitzt einen Garten, welcher einen Inhalt von 148 □° 36 □′ 32 □″ dc. hat, und will hievon 68 □° 82 □′ 48 □″ zur Anpflanzung von Obstbäumen, den übrigen Theil zum Anbaue von Gemüse, Blumen ꝛc. benützen; wie viel bleibt ihm zu letzterem Zwecke noch übrig? Antw. 79 □° 53 □′ 84 □″.

VI. Ein Hauseigenthümer nimmt an Miethzins 465 fl. ein, hat aber an Steuern 15 fl. 18 kr., an Gemeindeabgaben 10 fl. 36 kr. zu entrichten und auf Reparaturen ꝛc. im Durchschnitte 62 fl. 30 kr. zu verwenden. Welches ist der reine Ertrag des Hauses? Antw. 376 fl. 36 kr.

§. 39.

Bei der bürgerlichen Zeitrechnung*) nimmt man das Jahr zu 365 Tagen oder zu 12 Monaten, die Woche zu 7 Tagen (die Arbeitswoche zu 6 Tagen), den Tag zu 24 Stunden, die Stunde zu 60 Minuten, die Minute zu 60 Sekunden an, und zählt die Stunden von Mitternacht zu Mitternacht.

Die Monate unterscheidet man in Rechnungen, als 1sten, 2ten, 3ten, ... 12ten, so daß der Jänner der erste, der Februar der zweite ꝛc. Monat ist. Da 12 (Monate) in 365 Tagen nicht ohne Rest enthalten ist, und die einzelnen Monate nur nach ganzen Zahlen von Tagen bestimmt werden können, so nimmt man dieselben von verschiedener Dauer an, nämlich: den Jänner zu 31, Februar zu 28 (29), März zu 31, April zu 30, Mai zu 31, Juni zu 30, Juli zu 31, August zu 31, September zu 30, October zu 31, November zu 30, Dezember zu 31 Tagen an.

Um die bei der obigen Bestimmung der Tage eines Jahres ausgelassenen Stunden ꝛc. in Rechnung zu bringen, wird in jedem vierten Jahre, nämlich in jedem Jahre, dessen 2 letzte Ziffern durch 4 theilbar sind, als 1840, 1844, 1848, 1852..., im Monat

---

*) Vergl. metrolog. Tafeln I. Abtheilung. D. Zeitrechnung, im Anhange.

Februar ein Tag eingeschaltet, so daß ein Schaltjahr 366 Tage, und in einem solchen der Februar 29 Tage zählt.

Im gewöhnlichen Leben unterscheidet man vormittägige und nachmittägige Tagesstunden, und zählt bei beiden von 1 bis 12 Uhr. Es werden aber die nachmittägigen Stunden so in Rechnung gebracht, daß man die 12 vorausgegangenen Stunden des Vormittags hinzuzählt. Es wird z. B. $\frac{3}{4}$ über 3 Uhr oder $\frac{1}{4}$ auf 4 Uhr Nachmittags als 15 Stunden 45 Minuten genommen und geschrieben: 15 St. 45′; eben so 6 Minuten 30 Sekunden über halb fünf Nachmittags = 16 St. 36′ 30″.

Bei der Bestimmung eines Datums nach Jahren, Monaten und Tagen unterscheidet man laufende und verflossene Zeit. Wird z. B. angegeben als laufende Zeit: Am 6. April 1845, Morgens 6 Uhr, so ist die verflossene: 1844 J. 3 M. 5 T. 6 St. Bei den Zeitrechnungen wird gewöhnlich die verflossene Zeit angesetzt, und dann auf die verschiedene Dauer des letzten Monats Rücksicht genommen. Hiedurch erhält man auch in einigen Fällen ein etwas abweichendes Resultat von jenem, welches sich bei der Annahme der laufenden Zeit ergibt. Jenes Resultat der Rechnung, welches sich auf die verflossene Zeit bezieht, muß dann bei der Antwort in die laufende Zeit wieder verwandelt werden. Gibt z. B. die Rechnung: 1824 J. 3 M. 6 T. 14 St. 36′, so ist die entsprechende laufende Zeit: am 7. April 1825, 6 Minuten über halb drei Uhr Nachmittags.

Es kommen hiebei dreierlei auf Zeiträume bezügliche Aufgaben vor, welche nach den beigefügten Rechnungsarten gelöst werden:

1) Aus dem Anfange und der Dauer eines Zeitraums wird dessen Ende durch Addition;
2) aus dem Ende und Anfange die Dauer, und eben so
3) aus dem Ende und der Dauer der Anfang durch Subtraktion gefunden.

Beispiele.

I. Jemand war am 16. Juli 1762 geboren, und wurde 63 Jahre 5 Monate 12 Tage alt; wann starb er?

Aufl.	1761 J.	6 M.	15 T.	(verflossene Zeit)
	63 „	5 „	12 „	„ „
	1824 J.	11 M.	27 T.	„ „

Antw. Er starb am 28. Dezember 1825 (laufende Zeit).

II. Eine Himmelserscheinung fand am 27. Dezember 1841 Abends 5 Minuten 26 Sekunden über halb 9 Uhr Statt; sie kehrt in 26 Jahren 5 Monaten 20 Tagen 5 Stunden 24 Minuten 36 Sekunden wieder. Wann wird sie wieder eintreten?

Aufl.	1840 J.	11 M.	26 T.	20 St.	35′	26″
	26	5	20	5	24	36
	1867 J.	4 M.	47 T.	2 St.	0′	2″

Verwandelt man obige 47 Tage in das entsprechende 5. Monat, welches 31 Tage hat, so erhält man 1867 J. 5 M. 16 T. 2 St. 0′ 2″; also

Antw. Am 17. Juni 1868, 2 Sekunden über 2 Uhr Nachts.

III. Eine Mondsfinsterniß begann 9 Minuten 15 Sekunden nach drei Viertel auf 12 Uhr Nachts, und endete am andern Tage 5 Minuten 12 Sekunden nach ein Viertel auf 2 Uhr Morgens. Wie lange dauerte sie?

Aufl.	Ende	1 St.	20′	12″
	Anfang	23 St.	54′	15″

Weil letztere Zahl von ersterer nicht abgezogen werden könnte, so bezieht man auch das Ende auf den vorhergehenden Tag; dann ist

	(79)	(72)
25 St.	20′	12″
23	54	15
1 St.	25′	57″

IV. Jemand wurde am 6. Jänner 1789 Nachmittags 3 Uhr geboren; wie alt ist er am 4. August 1846 um 10 Uhr Vormittags?

			(33)	(34)
Aufl.	1845 J.	7 M.	3 T.	10 St.
	1788	0	5	15
	57 J.	6 M.	28 T.	19 St.

Weil der 7. Monat, welcher 31 Tage hat, entlehnt wird, und seine Tage zu den Tagen des Minuends addirt werden müssen, so hat man in diesem (nach Abgabe eines Tages an die Stunden) 31+2=33 Tage.

V. Napoleon starb am 5. Mai 1821 in einem Alter von 51 Jahren 8 Monaten 20 Tagen; wann wurde er geboren?

		(15)	(34)
Aufl.	1820 J.	4 M.	4 T.
	51	8	20
	1768 J.	7 M.	14 T.

Antw. Am 15. August 1769.

Anmerkung. Bei Berechnung eines Wechsel-Diskonto und im sonstigen kaufmännischen Verkehre wird jeder Monat zu 30 Tagen, das Jahr also zu 360 Tagen gerechnet.

III. Multiplikation.

§. 40.

Bei der Multiplikation muß immer einer der Faktoren, nämlich der Multiplikator, eine unbenannte Zahl seyn, weil bei diesem nicht auf die Art, sondern nur auf die Anzahl seiner Einheiten gesehen wird. Sind daher auch in einer Aufgabe die beiden Faktoren benannt, so muß man immer von der Benennung des einen absehen. Z. B. Von 6 Personen erhalte jede 5 fl., was bekommen alle zusammen? Die Antwort wird hier nicht dadurch erhalten, daß man 5 fl. multiplizirt mit 6 Personen, — dieß hätte gar keinen Sinn, — sondern daß man sagt: 6 Personen erhalten das Sechsfache vom Antheile Einer Person, daß man also das Sechsfache von 5 fl. = 30 fl. angibt.

Ist das Multiplikand eine zusammengesetzte benannte Zahl, so kann die Multiplikation auf zweierlei Art verrichtet werden: 1) mit Resolvirung, oder 2) ohne dieselbe.

1) Mit Resolvirung multiplizirt man also: Man bringt alle Sorten des Multiplikands auf den Ausdruck der niedrigsten Ordnung (§. 35), und multiplizirt das so resolvirte Multiplikand mit dem Multiplikator; am Ende muß das Produkt durch die Reduktion auf seine enthaltenen höheren Ordnungen gebracht werden.

Z. B. Was beträgt der Jahrlohn eines Dieners, welcher monatlich 16 fl. 49 kr. 3 pf. enthält? — Antw.: Das Zwölffache hievon.

Operation.

(16 fl. 49 kr. 3 pf.) × 12 = 4039 pf. × 12 = 48.468 pf.
48.468 pf. = 12.117 kr. = 201 fl. 57 kr. jährlicher Lohn.

2) Ohne Resolvirung verfährt man auf folgende Weise. Man rückt mit dem Multiplikator von der niedrigsten Sorte des Multiplikands bis zur höchsten vor, und multiplizirt jede Sorte eigens; am Ende sucht man die in dem Produkte einer niedrigeren Sorte enthaltenen höheren Einheiten durch die Reduktion heraus. — Diese Art ist die kürzere, und kann überall angewendet werden, wenn der Multiplikator eine stumme Zahl ist, oder als solche betrachtet werden muß (was bei rein arithmetischen Aufgaben immer der Fall ist. Vergl. §. 41.).

Obiges Beispiel wird nach dieser Art also berechnet:

16 fl.	49 kr.	3 pf.
		12
192 fl.	588 kr.	36 pf.
= 201 fl.	57 kr.	— pf.

Uebungsbeispiele.

I. 1 Loth kostet 1 kr. 2 pf., was kosten 1 Ctr. 12 ℔ 6 Loth?

Antw. 89 fl. 45 kr.

II. Wie viel geographische Meilen hat der Erdäquator, da jeder Grad desselben 15 geographische Meilen groß ist, und jeder Kreis 360 Grade hat?

Antw. 5400.

III. Jemand ließ sich ein Dutzend Hemden verfertigen; was kosteten dieselben, wenn er zu jedem 4 Ellen Leinwand, die Elle zu 36 kr., brauchte, und das Macherlohn von jedem 40 kr. betrug?

Antw. 36 fl. 48 kr.

IV. An der Umgrenzung eines viereckigen Grundstückes sind auf jeder Seite 20 Bäume gepflanzt, und zwar je zwei in einer Entfernung von 5 Fuß. Wie viel Fuß hat der Umfang desselben?

Antw. 400 Fuß.

V. Ein Bauer hat 22 Säcke Roggen, von welchen jeder 2 Metzen 1 Viertel (halbe Metzen) faßte, zur Schranne geführt, und 1 Metzen um 2 fl. 12 kr. verkauft. Wie viel nahm er im Ganzen ein? Wie schwer war das Getreide, wenn man einen Metzen zu 50 ℔ rechnet?

Antw. a) 121 fl., b) 2750 ℔.

§. 41.

Sollen bei der Bestimmung des Inhalts einer Figur oder eines Körpers Linien, welche im Längenmaße ausgedrückt sind, miteinander multiplizirt werden, so müssen dieselben vorher auf die kleinste gemeinschaftliche Benennung gebracht werden. Das Produkt, welches den Quadrat- oder Kubikinhalt ausdrückt, muß dann nach dem Dezimal- oder Duodezimal-Quadrat- oder Kubikmaß auf die enthaltenen höheren Einheiten reduzirt werden.

Wie bei verschiedenen Figuren und Körpern zu verfahren ist, und in wieferne hiebei benannte Zahlen mit (gleich) benannten zu multipliziren sind, wird in der Geometrie erläutert.

Hier soll nur die Erklärung und Berechnung des Parallelogramms und Parallelopipedums angegeben werden.

Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberstehende Seiten parallel (und gleich) sind; ist davon jeder Winkel ein Rechter oder hat er 90 Grade, so heißt es ein Rechteck; sind überdieß die 4 Seiten einander gleich, so heißt es ein Quadrat. Der Inhalt eines Parallelogramms wird (nach Quadrat-Ruthen, Quadrat-Fußen 2c.) gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe, oder, wie man im gemeinen Leben diese Linien nennt, die Länge mit der Breite multiplizirt.

Parallelopipedum ist ein Körper, welcher von 6 Parallelogrammen so begrenzt ist, daß je zwei gegenüberliegende gleich und parallel sind; sind dieselben Quadrate, so heißt der Körper Würfel. Parallelopipeda sind viereckig behauene Balken, Quadersteine, Holzstöße, Mauern, Zimmer 2c. Der Inhalt eines Parallelopipedum wird (nach Kubikruthen, Kubikfußen 2c.) gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe, oder nach dem gewöhnlichen Ausdrucke Länge, Breite und Höhe (Tiefe) miteinander multiplizirt.

Beispiele.

I. Welches ist der Inhalt eines Grundstückes, welches 30 Ruthen 6 Fuß 5 Zoll Dezimalmaß lang und 18 Ruthen 8 Fuß 4 Zoll breit ist?

Auflösung. Länge $= 30° 6' 5'' = 3065''$
Breite $= 18° 8' 4'' = 1884''$

Inhalt $= 3065 \times 1884 = 5774460 \,\square'' = 577 \,\square° \; 44 \,\square' \; 60 \,\square''$.

II. Was kostet ein quadratförmiger Bauplatz, welcher 16° 8' Duod.-Maß lang ist, und wovon 1 □' 45 kr. kostet?

Auflösung. Länge $=$ Breite $= 16° \; 8' = 200'$
Inhalt $= 200 \times 200 = 40000 \,\square' = 277 \,\square° \; 112 \,\square'$.
Kaufspreis $= 15$ kr. $\times 40000 = 1000$ fl.

III. Welches ist der kubische Inhalt eines Zimmers, das 2 Ruthen 8 Fuß lang, 2 Ruthen breit, und 1 Ruthe 6 Fuß Duodez.-M. hoch ist?

Operation. $2° \; 8' = 32'$ Länge,
$2° \; 0' = 24'$ Breite,
$1° \; 6' = 18'$ Höhe.

$32' \times 24' = 768 \,\square$ Fuß Grundfläche.

$768 \,\square' \times 18' = 13.824$ Kubikfuß $=$ Kubischer Inhalt des Zimmers.

IV. Welches ist der Kubikinhalt eines Holzstoßes, welcher 4° 3′ lang, 2° 4′ hoch ist, und eine Scheiterlänge von 3′ 5″ Dec.-M. hat?

Auflösung. 4° 3′ = 430″ und 3′ 5″ = 35″.
2° 4′ = 240″.

Also 430″ × 240″ × 35″ = 3612000 c″ = 3c°, 612 c′.

V. Das Amberger Erz-Seidel (ein Körpermaß) hat in der Länge 2′ 8″ 6‴, in der Breite 1′ 9″ 3‴, in der Tiefe 1′ 2″ bayer. Duodezimalmaß. — Welches ist der kubische Inhalt desselben?

Antw. 5 Kubikfuß 1028 Kubikzoll 1296 Kubiklinien Duod.-M.

IV. Division.

§. 42.

Bei der Division kann der Divisor sowohl benannt, als unbenannt seyn, weil dabei sowohl um die Anzahl, als auch um die Art der im Dividend enthaltenen Theile des Divisors gefragt seyn kann.

I. Ist der Divisor eine unbenannte Zahl, oder kann er als solche betrachtet werden, so wird der Quotient eine mit dem Dividend gleichbenannte Zahl, und die Division kann ebenfalls auf zweierlei Art verrichtet werden.

1) Mit Resolvirung des Dividends auf den Ausdruck der niedrigsten Sorte (auf die nämliche Art, wie bei der Multiplikation). Die Division geht dann wie mit unbenannten Zahlen. Da der Divisor eine unbenannte Zahl ist, so wird der Quotus mit dem Dividend gleichnamig, und muß dann durch Reduktion auf die allenfalls enthaltenen höheren Ordnungen gebracht werden. Vergleiche §. 40. I. Auflösung.

2) Ohne Resolvirung dividirt man also: Man dividirt mit dem Divisor, welcher hier allemal eine unbenannte Zahl seyn muß, zuerst die höchste Sorte; der allenfallsige Rest wird in Theile der nächst niedrigeren Sorte aufgelöset, zu den schon gegebenen Theilen addirt, und die Summe auf ein neues dividirt. So rückt man dann bis zur letzten oder niedrigsten Ordnung vor, und schreibt die Quotusse, mit der ihnen gehörigen Benennung, beiseits.

II. Ist der Divisor benannt, so macht man vor allem Dividend und Divisor gleichartig, und dividirt wie mit unbenannten Zahlen; der Quotient ist dann in der Regel eine unbenannte Zahl.

Beispiele.

I. Es sollen 5640 fl. 37 kr. unter 44 Personen gleichheitlich vertheilt werden; was trifft jede Person?

(Hier ist der Divisor als unbenannte Zahl zu betrachten.)

Operation.

a) mit Resolvirung.

(5640 fl. 37 kr.) : 44 =
338437 kr. | 7691 kr. 3 pf. =
(44) 128 fl. 11 kr. 3 pf.
308
304
264
403
396
77
44
Rest 33 kr. = 132 pf., $\frac{132}{44}$ pf. = 3 pf.

b) ohne Resolvirung.

$\frac{5640}{40}$ fl. = 128 fl.
Rest 8 fl. + 37 kr. = 517 kr.
$\frac{517}{44}$ kr. = 11 kr.
Rest 33 kr. = 132 pf.
$\frac{132}{44}$ pf. = 3 pf.
Also Quotus: 128 fl. 11 kr. 3 pf.

Also ist der Antheil einer Person: 128 fl. 11 kr. 3 pf.

II. Wie oft kann man von 3 Ztr. 60 Pfd. Zucker 9 Loth verkaufen?

Auflösung. (3 Ztr. 60 Pf.) : 9 Loth = 360 Pf. : 9 Loth = 11520 Loth : 9 Loth = 1280 Mal.

Anmerkung. Die Multiplikation wird durch die Division, und diese durch jene geprüft.

a) 9 Loth × 1280 = 11520 Loth = 3 Ztr. 60 Pfund.

b) (§. 40. I.)

201 fl. 57 kr.
12 |
81 | 16 fl.
72
9 fl. + 57 kr. = 597 kr.
$\frac{597}{12}$ kr. = 49 kr. 3 pf.

Uebungsbeispiele.

I. Es wurde ein Stück Tuch um 178 fl. 30 kr. gekauft, indem 1 Elle davon 5 fl. 15 kr. kostete; wie viel Ellen hielt das Stück?

Antw. 34.

II. Ein Bote wird an einen 15 Meilen entfernten Ort geschickt; wann wird er wieder zurückkommen, wenn er täglich 5 Meilen macht?

Antw. Nach 6 Tagen.

III. Jemand hat eine jährliche Besoldung von 1022 fl.; wie viel trifft davon auf einen Tag?

Antw. 2 fl. 48 kr.

IV. Ein Brauer bezahlte an Aufschlag 375 fl., nämlich für 1 Schäffel Malz 6 fl. 15 kr.; wie viel Schäffel versott er, und in wie viel Suden, wenn er auf einen Sud 6 Schäffel nimmt?

Antw. 60 Schäffel in 10 Suden.

§. 43.

Aus dem Flächeninhalte eines Parallelogramms und einer der beiden Linien, durch welche derselbe bestimmt wird, findet man die andere, indem man den Inhalt durch die gegebene Linie (mit Resolvirung) dividirt.

Aus dem Kubikinhalte eines Parallelopipedums und einer Fläche desselben, oder aus dem Kubikinhalte und zwei die Fläche bestimmenden Linien findet man die dritte Linie, wenn man den Kubikinhalt durch die Fläche oder das Produkt der beiden gegebenen Linien dividirt. Vergl. §. 41.

Beispiele.

I. Die Grundfläche eines Zimmers ist 768 □′ Duodez.-Maß; die Breite 2°. Welches ist die Länge?

Operation. $2^{\circ} = 24$ Fuß.

$$\frac{768\ \square'}{24'} = 32' = 2^{\circ}\ 8'$$

II. Der Kubikinhalt eines Sallettes ist $47^{c\circ}\ 545^{c'}\ 830^{c}$ Dez.-Maß; seine Höhe ist $3^{\circ}\ 0'\ 9''$; die Breite $3^{\circ}\ 4'\ 5''$. Welches ist die Länge?

Operation. Kubikinhalt $= 47'545830^{c''}$.

Grundfläche $= 309'' \times 345'' = 106605\ \square''$.

```
 47545830 |
(106605)  | 446″ = 4° 4′ 6′ Länge.
 426420
 ------
  490383
  426420
  ------
   639630
   639630
   ------
        0
```

III. Wie viele bayerische Klafter hält ein Holzstoß, welcher 21′ in der Länge, 12′ in der Höhe und 4′ Scheiterlänge hat?

Operation. Der Divisor ist 126 Kubikfuß (so viel beträgt die bayerische Holz-Kubikklafter).

12′ × 21′ × 4′ = 1008 Kubikfuß. — Inhalt des Holzstoßes.

$\frac{1008}{126}$ = 8 bayerische Klafter.

§. 44.

Bei sehr vielen Beispielen sind mehrere Rechnungsarten zugleich nothwendig; welche und in welcher Ordnung, lehrt am Besten die Uebung.

I. Ein Handelsmann erhält 24 Ellen Tuch, im Ankaufe zu 92 fl. 48 kr., der Transport kostet 2 fl. Er verkauft 1 Elle um 4 fl. 16 kr. Wie viel gewinnt er an 1 Elle, wie viel im Ganzen?

Auflösung. Auslage: 92 fl. 48 kr. + 2 fl. = 94 fl. 48 kr., davon trifft auf 1 Elle (94 fl. 48 kr.) : 24 = 5698 kr. : 24 = 237 kr. = 3 fl. 57 kr.

Er gewinnt an 1 Elle: 4 fl. 16 kr. — 3 fl. 57 kr. = 19 kr.

Also im Ganzen 19 × 24 = 456 kr. = 7 fl. 36 kr.

II. Ein Krämer kaufte einige Ballen Tuch, je 4 Ellen um 17 fl.; er verkaufte die nämliche Quantität, 5 Ellen um 29 fl., und gewann in Allem 186 fl. Wie viel Ellen hat er in Allem eingekauft?

Auflösung.

29 fl. : 5 = 5 fl. 48 kr. kostete 1 Elle beim Verkaufe.
17 fl. : 4 = 4 fl. 15 kr. „ „ „ „ Einkaufe.
1 fl. 33 kr. Gewinn an 1 Elle.

186 fl. : 1 fl. 33 kr. = 11160 kr. : 93 kr. = 120 Ellen.

III. Jemand will 25 Konventionsthaler, 30 Kronenthaler, 12 preußische Thaler und 15 Fünffrankenstücke gegen Dukaten im Kurse von 5 fl. 36 kr. auswechseln lassen; wie viel Dukaten erhält er, wenn die Unkosten auf Porto rc. 1 fl. betragen?

Auflösung.

Es sind 5 K.Th. = 12 fl., daher 25 K.Th. = (25 : 5 =) 5mal 12 fl. = 60 fl.
10 Kr.Th. = 27 fl., daher 30 Kr.Th. = (30 : 10 =) 3mal 27 fl. = 81 fl.
4 pr.Th. = 7 fl., daher 12 pr.Th. = (12 : 4 =) 3mal 7 fl. = 21 fl.
3 5Fr.st. = 7 fl., daher 15 5Fr.st. = (15 : 3 =) 5mal 7 fl. = 35 fl.
Zusammen 197 fl.
Unkosten 1 fl.
196 fl. = 1960 Sechser, 5 fl. 36 kr. = 56 Sechser. 196 fl.

1960 S. : 56 S. = 35 Dukaten.

IV. Jemand nahm am 1. Juli 1835 einen Bedienten unter der Bedingung in Dienst, daß er ihm für jedes der 3 ersten Jahre 90 fl. 30 kr., in jedem folgenden um 3 Kronenthaler mehr Lohn gebe. Wenn nun dieser am 1. Jänner 1841 den Dienst verließ; wie viel Lohn erhielt er im Ganzen?

Auflösung. 1840 J. — M.
1834 6
5 J. 6 M. blieb er im Dienste.

Für die 3 ersten Jahre erhielt er 90 fl. 30 kr. × 3 = 271 fl. 30 kr.
Für das 4. und 5. Jahr zusammen 98 fl. 36 kr. × 2 = 197 " 12 "
Für die Hälfte des 6. Jahres 98 fl. 36 kr. : 2 = 49 " 18 "
518 fl. — kr.

V. Ein Brauer kaufte einem Wirthe, der zugleich Oekonom war, einmal 24 Schäffel Gerste, à 8 fl. 30 kr., später 20 Sch., à 9 fl. 12 kr. und 10 Ztr. Hopfen, à 50 fl. ab; dagegen gab er ihm 120 Eimer Winterbier, die Maß zu 3 kr. 3 pf., 112 Eimer Sommerbier, die Maß zu 4 kr. 1 pf. und Treber im Preise zu 6 fl. 30 kr. Wie viel hat der Wirth baar darauf zu zahlen? Wie viel gewinnt er im Ganzen, wenn er an 1 Maß Winterbier 3 pf., an 1 Maß Sommerbier 1 kr. 1 pf. gewinnt?

8 fl. 30 kr. × 24 = 204 fl.
9 fl. 12 kr. × 20 = 184 "
50 fl. × 10 = 500 "
Einnahme des Wirthes 888 fl.

Winterbier: 3 kr. 3 pf. × 120 × 60 = 450 fl. — kr.
Sommerbier: 4 kr. 1 pf. × 112 × 60 = 476 " — "
Treber: 6 " 30 ".
Ausgabe 932 fl. 30 kr.
Einnahme 888 " — "
Baar darauf zu zahlen 44 fl. 30 kr.

Gesammtgewinn 230 fl.

VI. Eine 12′ breite Kühle in einem Brauhause soll 72 Eimer fassen, und darin das Bier 9″ dc. tief stehen, wie lang muß sie sie seyn, da 1 bayer. Maß 43 c″ dc. hat?

Auflösung.

Inhalt der Kühle: 72.60 = 4320 Maß = 4320.43 = 185760 c″.
Senkrechter Querschnitt: 120×9 = 1080 □″.
Länge: 185760 : 1080 = 172″ = 1° 7′ 2″.

II. Artikel.

Von den Brüchen.

§. 45.

1) Unter Bruch versteht man einen oder mehrere gleiche Theile eines Ganzen. (§. 2. 4°.) Jeder Bruch besteht daher aus 2 Zahlen; die eine gibt an, in wie viele gleiche Theile ein Ganzes getheilt ist, und heißt Nenner; die andere gibt an, wie viele solche Theile genommen sind, und heißt Zähler. Diese beiden Zahlen werden beim Anschreiben eines Bruches durch einen Querstrich in der Art getrennt, daß der Zähler ober und der Nenner unter den Querstrich gesetzt wird. Z. B. bei dem Bruche $\frac{3}{4}$ (drei Viertel) drückt der Nenner 4 aus, daß das Ganze in 4 gleiche Theile getheilt ist; der Zähler 3 gibt an, daß 3 dieser Theile genommen sind.

2) Der Zähler kann an und für sich als eine ganze Zahl betrachtet werden, für dessen Einheit der Nenner die Beschaffenheit angibt. So drückt $\frac{3}{4}$ aus, daß 3 Dinge vorhanden seyen, von welchen jedes ein Viertel des Ganzen ist. Zähler und Nenner eines Bruches verhalten sich eben so zu einander, wie Zahl und Namen bei benannten Zahlen.

3) Brüche sind daher gleichartig, wenn sie gleichen Nenner (gleiche Benennung) haben.

4) Eine Bruchseinheit, deren Beschaffenheit durch den Nenner ausgedrückt wird, kann aber auch so oft und selbst öfter wiederholt werden, als der Nenner angibt, wodurch uneigentliche und unechte Brüche entstehen, welche das Ganze selbst einmal, oder dieses ein- oder mehrmal und überdieß noch einen Theil davon enthalten.

§. 46.

Jeder Bruch kann als formeller Quotient betrachtet werden, dessen Dividend der Zähler, und dessen Divisor der Nenner ist. Z. B. $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ heißt: 1 oder 3 soll in 4 gleiche Theile getheilt werden. (Vergl. §. 45. und §. 8. 4.)

Daraus und aus §. 30. ergeben sich folgende Sätze:

I. Jeder Bruch, worin Zähler und Nenner gleich sind, ist = 1; daher kann die Einheit als Bruch von allen möglichen Nennern dargestellt werden, wenn der Zähler dem Nenner gleich gemacht wird. Also

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} \text{ u. s. w.}$$

II. Bei einerlei Nenner (Divisor) ist der Werth des Bruches um so größer, je größer sein Zähler (Dividend) ist; jener Werth wird um so kleiner, je kleiner der Zähler.

$$\frac{5}{6} > \frac{3}{6}, \frac{1}{4} < \frac{3}{4}$$

III. Bei einerlei Zähler wird der Werth des Bruches um so größer, je kleiner sein Nenner ist, und umgekehrt.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}, \frac{3}{5} < \frac{3}{4}$$

IV. Jede ganze Zahl kann als Bruch mit gegebenem Nenner dargestellt werden, wenn man, um dafür den Zähler zu erhalten, jene Zahl mit dem gegebenen Nenner multiplizirt. Hiedurch wird die Zahl zugleich um Gleiches vermehrt und vermindert, also in seinem Werthe nicht geändert. Z. B. Man verwandle 6 in einen Bruch mit dem Nenner 4,

$$6 = \frac{6.4}{4} = \frac{24}{4}.$$

V. Bleibt bei der Division ganzer Zahlen ein Rest, so ist der Quotient gleich der ganzen Zahl, welche angibt, wie oft der Divisor im Dividend wirklich enthalten ist, sammt einem Bruche, dessen Zähler der Rest und dessen Nenner der Divisor ist. Z. B.

$$149 : 12 = 12\tfrac{5}{12}.$$

§. 47.

Aus dem vorhergehenden §. lassen sich ferner nachstehende Sätze ableiten, auf welchen fast die ganze Rechnung mit Brüchen beruht.

I. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl **multiplizirt**, wenn man durch diese entweder

1. den **Zähler multiplizirt**, oder 2. den **Nenner dividirt**, indem man im ersten Falle die Anzahl der genommenen Theile vervielfältigt, ohne deren Größe zu verändern; im

zweiten jeden einzelnen genommenen Theil (jede Bruchseinheit) im Verhältniß zu seiner ursprünglichen Größe vergrößert.

Z. B. das Vierfache von $\frac{3}{8}$ ist entweder

$$\frac{3\times4}{8}=\frac{12}{8};\text{ oder }\frac{3}{8:4}=\frac{3}{2}.$$

Das Sechsfache von $\frac{5}{6}$ ist entweder

$$\frac{5\times6}{8}=\frac{30}{6};\text{ oder }\frac{5}{6:6}=\frac{5}{1}=5$$

Multiplizirt man daher einen Bruch mit seinem Nenner, so erhält man den Zähler desselben als eine ganze Zahl zum Produkte.

II. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man durch diese entweder

1. den Zähler dividirt, oder 2. den Nenner multiplizirt, indem man im ersten Falle von den ihrem Werthe nach unverändert gelassenen Bruchseinheiten den verlangten Theil nimmt; im zweiten Falle aber durch Vervielfältigung des Nenners den Werth der Bruchseinheiten so vielmal kleiner macht, als der Divisor Einheiten enthält.

Z. B. der fünfte Theil von $\frac{5}{7}$ ist entweder

$$\frac{5:5}{7}=\frac{1}{7};\text{ oder }\frac{5}{7\times5}=\frac{5}{35}.$$

III. Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn man durch die nämliche Zahl Zähler und Nenner multiplizirt oder dividirt, indem dadurch der Bruch um das gleiche Vielfache vermehrt und vermindert, also seinem Werthe nach nicht verändert wird.

$$\frac{3}{4}=\frac{3.2}{4.2}=\frac{6}{8},\ \frac{9}{12}=\frac{9:3}{12:3}=\frac{3}{4}$$

§. 48.

Man theilt die Brüche ein:

I. in gemeine, welche was immer für Nenner haben mögen, und deren man sich gewöhnlich im bürgerlichen Leben bedient;

II. in besondere, welche nur gewisse Formen haben können; dazu gehören:

1. die zehntheiligen oder Dezimalbrüche, deren Nenner 10, 100, 1000 u. s. w.

2. die

2. die sechzigtheiligen, Sexagesimalbrüche, deren Nenner 60, 60.60, 60.60.60 u.s.w. ist;
3. die Kettenbrüche.

Bei den gemeinen Brüchen unterscheidet man wieder:
a) eigentliche oder echte Brüche, deren Zähler kleiner ist, als der Nenner, und welche daher kleiner sind als 1, z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$;
b) uneigentliche oder unechte Brüche, deren Zähler dem Nenner gleich oder größer als dieser ist, und die = oder > 1 sind, z. B. $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$;
c) gemischte Zahlen, welche Ganze mit einem (durch Addition verbundenen) Bruche enthalten, z. B. $3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4}$;
d) gebrochene Brüche, deren Zähler oder Nenner Brüche oder gemischte Zahlen sind, z. B.

$$\frac{\frac{1}{3}}{4}, \frac{2}{\frac{3}{4}}, \frac{1\frac{1}{2}}{3}, \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$$

e) zusammengesetzte Brüche, deren Zähler und (oder) Nenner Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten sind. (Vergl. §. 62. Zusatz.)

Anmerkung. Die Sexagesimalbrüche wurden hinweggelassen, weil sie eines Theils die Würdenlehre voraussetzen, und, wo dieß nicht der Fall ist, als gemeine Brüche behandelt werden können, anderen Theils auch minder wichtig sind.

I. Hauptstück.

Von den gemeinen Brüchen.

A) Vorbegriffe und Vorübungen.

§. 49.

a) Aufgabe. Gemischte Zahlen in einen uneigentlichen Bruch zu verwandeln.

Auflösung. Man multiplizire die Ganzen mit dem Nenner des Bruches, und addire zum Produkte den Zähler. — Unter die Summe schreibe man den vorigen Nenner;

$$\text{z. B. } 8\frac{3}{5} = \frac{40 + 3}{5} = \frac{43}{5} \quad (\text{§. 46. IV.})$$

b) Einen uneigentlichen Bruch in gemischte Zahlen zu verwandeln.

Auflösung. Man dividire den Zähler durch den Nenner. Der Quotus gibt die Ganzen. Der Rest wird als Zähler, und darunter der vorige Nenner angeschrieben, und der Bruch dem Ganzen angehängt.

Z. B. $\frac{95}{7} = 13\frac{4}{7}$.

§. 50.

c) **Aufgabe. Einen Bruch zu verkleinern.**

Einen Bruch verkleinern oder aufheben heißt, ihn seines Werthes unbeschadet durch einen kleineren Zähler und Nenner ausdrücken. Aber nur solche Brüche können verkleinert werden, deren Zähler und Nenner ein *gemeinschaftliches Maß* haben.

Brüche werden verkleinert, indem man Zähler und Nenner durch ihr gemeinschaftliches Maß dividirt. Vergl. §. 32.

Z. B. $$\frac{25650}{40800} \overset{10}{=} \frac{2565}{4080} \overset{5}{=} \frac{513}{816} \overset{3}{=} \frac{171}{272}$$

$$\frac{1524}{3108} \overset{4}{=} \frac{381}{777} \overset{3}{=} \frac{127}{259}$$

* Der Schüler übe sich selbst in Bildung von Brüchen, welche durch die §. 32. I. a—g. angegebenen Zahlen verkleinert werden können.

§. 51.

d) **Aufgabe. Brüche auf die kleinste Form zu bringen.**

Auflösung. Man bringt Brüche auf die kleinste Form, wenn man Zähler und Nenner durch ihr *größtes gemeinschaftliches* Maß dividirt, daß sie Primzahlen unter sich werden. §. 32. III. und 33.

Beispiele.

I. $\frac{174}{377} \overset{29}{=} \frac{6}{13}$. (§. 33. I.)

II. $\frac{215}{417}$ kann nicht verkleinert werden. (§. 33. II.)

III. $\frac{297}{187}$

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
187 & 297 & 1 & & & \\
 & 187 & & & & \\
 & 110 & 187 & 1 & & \\
 & & 110 & & & \\
 & & 77 & 110 & 1 & \\
 & & & 77 & & \\
 & & & 33 & 77 & 2 \\
 & & & & 66 & \\
 & & & & 11 & 33 \;|\; 3 \\
 & & & & & 33 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Alſo $\frac{297}{187} \underset{}{\overset{11}{\smile}}= \frac{27}{17}$.

§. 52.

e) Aufgabe. Brüche von verſchiedenen Nennern auf einen gegebenen Generalnenner zu bringen.

Auflöſung. Man dividire den Generalnenner durch die ſpeziellen Nenner, und multiplizire die Quotuſſe mit den treffenden ſpeziellen Zählern.

Beiſpiel. Man bringe $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ auf den gemeinſchaftlichen Nenner 60.

Operation.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12} = \frac{30,\ 40,\ 45,\ 24,\ 50,\ 35}{60}$$

Aus der Diviſion des Generalnenners durch den ſpeziellen ergibt ſich nämlich der jedesmalige Faktor, mit welchem Zähler und Nenner des Bruches multiplizirt werden müſſen, um denſelben auf den gegebenen Generalnenner zu bringen. Durch eine ſolche Multiplikation wird der Werth des Bruches nicht geändert. (Vgl. §. 47. III.)

Zergliedert ſtehet die Operation alſo:

$$\frac{1 \times 30}{2 \times 30}, \frac{2.20}{3.20}, \frac{3.15}{4.15}, \frac{2.12}{5.12}, \frac{5.10}{6.10}, \frac{7.5}{12.5}.$$

§. 53.

f) Aufgabe. Brüche auf den kleinſten Generalnenner zu bringen.

Auflöſung. Dieſer Generalnenner iſt nichts anders, als die kleinſte Zahl, in welcher alle ſpeziellen Nenner als Diviſoren

ohne Rest enthalten sind. Um diesen kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu finden, durchstreiche man jene Nenner, welche in größeren bereits enthalten sind, zerfälle jeden der noch gebliebenen in seine einfachen Faktoren, durchstreiche von den gleichen Faktoren verschiedener Nenner alle bis auf einen, und multiplizire die noch gebliebenen Faktoren miteinander. Das daraus entstandene Produkt wird das kleinste Vielfache aller Nenner, mithin der kleinste gemeinschaftliche Nenner seyn. Nun geht die Operation ganz nach der Regel, die im vorhergehenden Paragraphen gegeben wurde.

Beispiel. Man bringe auf den kleinsten Generalnenner.

a) $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{3}{8}, \frac{7}{9}, \frac{11}{12}, \frac{7}{24}, \frac{3}{40}, \frac{17}{48}, \frac{19}{72}.$

b) $\frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}, \frac{13}{21}, \frac{7}{36}.$

Auflösung.

a) Nenner: ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~12~~, ~~24~~, 40, 48, 72
7 ~~2.2.2~~.5, 2.2.2.2.~~3~~, ~~2.2.2~~.3.3.

Kleinster Generalnenner = 35.4.4.9 = 5040.
(7.5.2.2.2.2.3.3 = 5040).

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{3}{8}, \frac{7}{9}, \frac{11}{12}, \frac{7}{24}, \frac{3}{40}, \frac{17}{48}, \frac{19}{72} = \frac{3360,\ 1260,\ 3024,\ 3600,\ 1890,\ 3920,\ 4620,\ 1470,\ 378,\ 1785,\ 1330}{5040}.$$

b) Nenner: 5, ~~7~~, 8, ~~9~~, ~~12~~, 21, 36
5 2.2.2, ~~3~~.7, ~~2.2~~.3.3.

Generalnenner = 5.2.2.2.3.3.7 = 2520.

$$\frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}, \frac{13}{21}, \frac{7}{36} = \frac{1512,\ 720,\ 1575,\ 1120,\ 1050,\ 1560,\ 490}{2520}.$$

Zusatz 1. Sind alle speziellen Nenner schon in einem gegebenen höheren enthalten, so gilt dieser auch schon als Generalnenner; z. B.

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{11}{18} = \frac{12,\ 15,\ 14,\ 11}{18}$$

Zus. 2. Sind aber alle speziellen Nenner Primzahlen — absolute, oder unter sich: so ist der Generalnenner ein Produkt aus

allen speziellen Nennern. Die neuen speziellen Zähler zu erhalten, multiplizire man den vorigen Zähler eines Bruches durch die speziellen Nenner aller übrigen Brüche, nur durch den seinigen nicht.

Z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{2}{7} = \frac{105, 140, 126, 60}{210}$.

Zergliedert steht die Operation also:

$$\frac{1}{2} \times \frac{3.5.7.}{3.5.7.}, \frac{2}{3} \times \frac{2.5.7.}{2.5.7.}, \frac{3}{5} \times \frac{2.3\ 7.}{2.3.7.}, \frac{2}{7} \times \frac{2.3.5}{2.3.5}$$

Zus. 3. Haüfig wird die Operation in der Form gemacht, daß man, um den Generalnenner zu bestimmen, die gegebenen Brüche in eine Reihe schreibt, seitwärts einen senkrechten Strich setzt, und nach diesem die gemeinschaftlichen Theiler anschreibt: um die neuen speziellen Zähler zu erhalten, die Quotusse zur Linken, die Produkte oder die neuen Zähler zur Rechten eines senkrechten Striches setzt.

Obiges zweites Beispiel

$\frac{3}{5}$,	$\frac{2}{7}$,	$\frac{5}{8}$,	$\frac{4}{9}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{13}{21}$,	$\frac{7}{36}$	7
	1		3	1	3	3	12
					1	1	3

Generalnenner $5 \times 8 \times 3 \times 7 \times 12 \times 3 = 2520$

	2520			2520	
$\frac{3}{5}$	504	1512	$\frac{4}{9}$	280	1120
$\frac{2}{7}$	360	720	$\frac{5}{12}$	210	1050
$\frac{5}{8}$	315	1575	$\frac{13}{21}$	120	1560
			$\frac{7}{36}$	70	490

§. 54.

g) Aufgabe. Bestimmen, welcher von zwei Brüchen dem Werthe nach größer sey.

Auflösung. Man bringe die Brüche, wenn sie verschiedene Nenner haben, auf einen gleichen Nenner. Derjenige Bruch, welcher dann den größeren Zähler erhält, ist dem Werthe nach der größere.

Z. B. $\frac{5}{6} < \frac{11}{12} = \frac{10 < 11}{12}$.

$\frac{7}{9} > \frac{8}{11} = \frac{77 > 72}{99}$.

$\frac{3}{4} < \frac{7}{8} > \frac{13}{16} = \frac{12 < 14 > 13}{16}$.

B) Stammrechnungsarten mit unbenannten Brüchen.

I. Addition.

§. 55.

Aufgabe. Brüche zu addiren.

Auflösung. I. Man bringe die Brüche auf gleiche Nenner, wenn sie solche noch nicht haben.

II. Addire dann die Zähler, und setze unter die Summe den gemeinschaftlichen Nenner. Der auf solche Art erhaltene Bruch wird dann, wenn es angeht, verkleinert; oder, wenn er Ganze enthält, in eine gemischte Zahl verwandelt.

III. Führen die Brüche auch Ganze mit sich, so addirt man zuerst die Ganzen, dann die Brüche. Am Ende werden die Ganzen, die sich allenfalls aus der Summe der Brüche ergaben, zur Summe der bloßen Ganzen hinzugezählt. — Man kann aber auch die Ganzen mit ihrem zugehörigen Bruche in einen uneigentlichen Bruch verwandeln, und übrigens ganz, wie mit echten Brüchen, verfahren.

Beweis. Es läßt sich nur Gleichartiges in eine Summe bringen. Brüche aber sind gleichartig, wenn ihre Einheiten auf die nämliche Benennung sich beziehen, oder wenn sie gleiche Nenner haben. (§. 45. 2°. u. 3°.) Werden nun die gleichartigen Bruchseinheiten in eine Summe gebracht, so muß diese, wie bei der Addition benannter Zahlen, mit den Summanden gleiche Beschaffenheit (Benennung) erhalten.

Beispiele.

I. $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{7}{9} = \frac{15}{9} = 1\frac{6}{9} = 1\frac{2}{3}$.

II. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6} + \frac{7}{12} + \frac{13}{15} =$

$\frac{30+40+45+48+10+35+52}{60} = \frac{260}{60} = 4\frac{1}{3}$.

III. $3\frac{1}{5} + 8\frac{5}{6} + 9\frac{1}{10} + 7\frac{11}{15}$.

a) Summe der bloßen Ganzen $3+8+9+7=27$.

b) Summe der Brüche $\frac{1}{5}+\frac{5}{6}+\frac{1}{10}+\frac{11}{15}=\frac{6+25+3+22}{30}=$

$\frac{56}{30} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$.

Totalsumme: $27 + 1\frac{13}{15} = 28\frac{13}{15}$.

II. Subtraktion.

§. 56.

Aufgabe. Brüche von Brüchen zu subtrahiren.

Auflösung. I. Man mache die Brüche gleichartig, und ziehe Zähler von Zähler ab; unter den Rest wird dann der gemeinschaftliche Nenner geschrieben, und der Bruch, wenn es möglich ist, verkleinert.

II. Hat man von bloßen Ganzen einen Bruch abzuziehen, so verwandle man die Ganzen in einen uneigentlichen Bruch mit dem Nenner 1, und bringe ihn auf den Nenner des Subtrahends. Kürzer borgt man von den Ganzen 1, und drückt dieses als einen Bruch mit dem Nenner des abzuziehenden Bruches aus. (Vergl. §. 45. I.)

III. Hat man gemischte Zahlen von gemischten abzuziehen, so verwandle man sie in uneigentliche Brüche, und verfahre dann ganz wie mit eigentlichen Brüchen. Doch wird die Rechnung dadurch abgekürzt, daß man Brüche von Brüchen und Ganze von Ganzen abzieht. Enthält aber hiebei das Subtrahend einen größeren Bruch, als das Minuend; so muß man erst von den Ganzen des Minuends 1 borgen, und in gleichartigen Theilen ausgedrückt zum Minuendbruche addiren.

* Alle diese Regeln gehen theils aus dem Begriffe des Subtrahirens, als Gegensatzes der Addition, theils aus der Natur gebrochener Zahlen hervor, und bedürfen keines ferneren Beweises.

Beispiele.

I. $\frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

II. $\frac{13}{14} - \frac{3}{7} = \frac{13-6}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

III. $4 - \frac{5}{11} = \frac{44-5}{11} = \frac{39}{11} = 3\frac{6}{11}$.

Oder kürzer: $4 - \frac{5}{11} = 3\frac{11}{11} - \frac{5}{11} = 3\frac{6}{11}$.

IV. $4\frac{2}{3} - 2\frac{4}{5} = \frac{14}{3} - \frac{14}{5} = \frac{70-42}{15} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$.

Oder $4\frac{2}{3} - 2\frac{4}{5} = 4\frac{10}{15} - 2\frac{12}{15} = 3\frac{25}{15} - 2\frac{12}{15} = 1\frac{13}{15}$.

§. 57.

Die Addition und Subtraktion dienen sich auch hier gegenseitig zur Probe; das Verfahren ist das nämliche, wie bei ganzen Zahlen. (Vergl. §. 14.)

Beispiele:

I. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{10}=\frac{15+20+6+21}{30}=\frac{62}{30}=\frac{31}{16}=2\frac{1}{15}$.

Probe. $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{10}=\frac{20+6+21}{30}=\frac{47}{30}$.

$\frac{62}{30}-\frac{47}{30}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$.

II. $\frac{5}{8}-\frac{3}{7}=\frac{35-24}{56}=\frac{11}{56}$. Probe. $\frac{11}{56}+\frac{24}{56}=\frac{35}{56}=\frac{5}{8}$.

III. Multiplikation.

§. 58.

Aufgabe. Brüche mit Brüchen zu multipliziren.

Auflösung. Man multiplizire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.

Beispiel und Beweis. $\frac{3}{8}$ mit $\frac{5}{7}$ multiplizíren, heißt entweder

a) den siebenten Theil von $\frac{3}{8}$ fünfmal, oder

b) vom Fünffachen des Bruches $\frac{3}{8}$ den siebenten Theil nehmen, mithin

$$\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{3}{8.7}\times 5=\frac{3.5}{8.7}=\frac{15}{56} \text{ oder}$$

$$\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\left(\frac{3}{8}.5\right):7=\frac{3.5}{8.7}=\frac{15}{56}.$$

Zusatz 1. Die Rechnung kann dadurch häufig abgekürzt werden, daß man vorher den Zähler des einen Bruches und den Nenner des andern durch einerlei Zahl dividirt oder verkleinert.

$$\text{Z. B. } \frac{7}{20}\times\frac{15}{28}=\frac{\not{7}.1}{\not{5}.4}\times\frac{\not{5}.3}{\not{7}.4}=\frac{3}{16}.$$

Zusatz 2. Gemischte Zahlen verwandelt man vorher in unechte Brüche. Ist das Multiplikand (oder der Multiplikator §. 47. I.) eine ganze Zahl, so verwandelt man diese in einen Bruch mit dem Nenner 1. Z. B.

$$3\tfrac{2}{3} \times 5\tfrac{1}{2} = \frac{11}{3} \times \frac{11}{2} = \frac{121}{6} = 20\tfrac{1}{6}.$$

$$3 \times \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1\tfrac{1}{5}.$$

Zusatz 3. Sind mehrere Brüche miteinander zu multipliziren, so multiplizire man alle Zähler und alle Nenner miteinander, nachdem man vorher so viel als möglich verkleinert hat.

Beispiele.

I. $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}.$

II. $\frac{4}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{3}.$

III. $\frac{3}{5} \times 5 = 3.$ } §. 47. I.

IV. $\frac{7}{\underset{4}{\cancel{12}}} \times \frac{5}{\cancel{18}} = \frac{35}{4} = 8\tfrac{3}{4}.$ }

V. $9 \times 8\tfrac{2}{27} = \frac{\cancel{9}}{1} \times \frac{218}{\underset{3}{\cancel{27}}} = \frac{218}{3} = 72\tfrac{2}{3}.$

Oder kürzer $9 \times 8\tfrac{2}{27} = 9 \times (8 + \tfrac{2}{27}) = 72 + \tfrac{2}{3}.$

VI. $12 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}} \times 3 \times 2}{1 \cdot \cancel{4} \cdot 5} = \frac{18}{5} = 3\tfrac{3}{5}.$

VII. $4\tfrac{1}{2} \times 1\tfrac{2}{3} \times 3\tfrac{3}{5} \times 12 = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \times \frac{\overset{9}{\cancel{18}}}{\cancel{5}} \times \frac{12}{1} = 3 \times 108 = 324.$

VIII. $\cancel{48} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{\cancel{12}} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{8} = 1\tfrac{7}{8}.$

§. 59.

Ist der eine Faktor ein echter Bruch, so ist das Produkt immer kleiner, als der andere Faktor. Dieß geht aus dem Begriffe eines echten Bruches und den Gesetzen der Multiplikation hervor. Je kleiner nämlich die Faktoren sind, desto kleiner wird das Produkt. Ist nun der eine Faktor $= 1$, so wird das Produkt gleich dem andern Faktor; folglich muß, wenn der eine Faktor < 1, d. i. ein echter Bruch ist, auch das Produkt kleiner werden, als der andere Faktor. Oder: die Multiplikation mit einem Bruche ist aus der Multiplikation mit dem Zähler und der

Division durch den Nenner zusammengesetzt. Wird nun eine Zahl mehr vermindert als vermehrt, so muß das Produkt auch kleiner werden, als jene Zahl. Daher kann das Multipliziren mit einem echten Bruche nicht als ein Vervielfältigen oder Vermehren erklärt werden.

IV. Division.

§. 60.

Aufgabe. Brüche durch Brüche zu dividiren.

I. Auflösung. Man bringt Dividend und Divisor auf gleichen Nenner, und dividirt dann den Zähler des Dividends durch den des Divisors entweder wirklich, oder, wenn dieses nicht möglich ist, durch bruchweise Bezeichnung.

Beweis. Die Division der Brüche ist der Division von benannten ganzen Zahlen durch benannte (§. 42. II.) entsprechend. Man will auch bei jenen nur erfahren, wie oft die Bruchseinheiten des Divisors in den gleichartigen Bruchseinheiten des Dividends (§. 45. 2°. u. 3°.) enthalten sind, ohne daß man auf deren sonstige Beschaffenheit (Benennung) weiter sieht.

Z. B. $\frac{10}{21} : \frac{5}{42} = \frac{20}{42} : \frac{5}{42} = 4.$

$\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{15}{35} : \frac{28}{35} = \frac{15}{28}.$

II. Auflösung. Man multiplizire das Dividend mit dem umgestürzten Divisorbruche.

Beispiel und Beweis. $\frac{3}{4} : \frac{5}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$

denn $\frac{9}{20} \times \frac{5}{3} = \frac{3.\not{3}}{4.\not{5}} \times \frac{\not{5}.1}{\not{3}.1} = \frac{3}{4}.$

Anmerkung. Diese Entwicklung kann in sofern als Beweis betrachtet werden, als man die Division erklärt: Eine Zahl durch eine zweite dividiren, heißt eine dritte Zahl finden, welche, mit der zweiten multiplizirt, die erste wieder gibt. Das durch die zweite Auflösungsart gegebene Gesetz der Division wird auch manchmal in die Worte eingekleidet:

Jede Bruch-Division ist eine Bruch-Multiplikation mit umgestürztem Divisorbruche.

Zusatz 1. Auch hier kann man, zur Abkürzung der Rechnung nach der zweiten Art, nach Umstürzung des Divisorbruches Zähler und Nenner des Dividends und Divisors gegenseitig verkleinern. (§. 58. Zus. 1.) Sind Zähler und Nenner des Divisors im Zähler und Nenner des Dividends enthalten, so kann Zähler durch Zähler, Nenner durch Nenner dividirt werden.

z. B. $\frac{7}{12} : \frac{5}{8} = \frac{7}{3 \cdot \not{4}} \times \frac{\not{4} \cdot 2}{5} = \frac{14}{15}$.

$\frac{9}{25} : \frac{3}{5} = \frac{9 : 3}{25 : 5} = \frac{3}{5}$.

Zusatz 2. Sind gemischte Zahlen im Dividend oder Divisor gegeben, so hat man sie vorerst in uneigentliche Brüche zu verwandeln. Ist das Dividend eine ganze Zahl, so verwandelt man es in einen Bruch mit dem Nenner 1. Ist der Divisor eine ganze Zahl, so verfährt man nach §. 47. II.

I. $\frac{3}{4} : \frac{3}{7} = \frac{\not{3}}{4} \times \frac{7}{\not{3}} = \frac{7}{4}$ oder $\frac{3}{4} : \frac{3}{7} = \frac{21}{28} : \frac{12}{28} = 21 : 12 = 1\frac{9}{12} = 1\frac{3}{4}$.

II. $9\frac{3}{5} : 12 = \frac{48}{5} : 12 = \frac{4}{5}$

III. $7\frac{2}{3} : 4 = \frac{23}{3} : 4 = \frac{23}{12}$

(II. und III.) Vergl. §. 47. II.

IV. $15 : \frac{4}{5} = \frac{15}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}$.

V. $5\frac{3}{7} : 2\frac{1}{5} = \frac{38}{7} : \frac{11}{5} = \frac{38}{7} \times \frac{5}{11} = \frac{190}{77} = 2\frac{36}{77}$.

VI. $5\frac{7}{15} : 8\frac{1}{5} = \frac{82}{15} : \frac{41}{5} = \frac{82 : 41}{15 : 5} = \frac{2}{3}$.

VII. $9\frac{3}{4} : 3 = 9 : 3 + \frac{3 : 3}{4} = 3\frac{1}{4}$.

§. 61.

1. Wenn der Divisor ein echter Bruch ist, wird der Quotient immer größer, als das Dividend. Der Grund ist dem in §. 59. angegebenen ähnlich. Dividiren kann also bei Brüchen nicht als ein Vermindern erklärt werden.

2. Multiplikation und Division dienen sich auch bei Brüchen gegenseitig zur Probe.

§. 62.

Aufgabe. Gebrochene Brüche in einfache zu verwandeln.

Auflösung. Man dividire den Zähler durch den Nenner. Der **Beweis** ergibt sich einfach daraus, daß jeder Bruch eine angedeutete Division ist.

Anmerkung. Weil aber sowohl Zähler als Nenner eines solchen Bruches für sich eine ganze Zahl seyn kann, während Nenner oder Zähler ein Bruch ist, oder Zähler und Nenner Brüche seyn können, so ist zu rathen, daß man, um jeden Irrthum zu vermeiden, die zum Hauptzähler oder Nenner gehörigen Zahlen in Klammern einschließe.

Beispiele.

I. $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)}{8} = \frac{3}{4} : 8 = \frac{3}{32}$

II. $\dfrac{5}{\left(\frac{5}{6}\right)} = 5 : \frac{5}{6} = 6$

III. $\dfrac{4\frac{4}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{24}{5} : \frac{2}{5} = 12$

IV. $\dfrac{3}{\left(\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)}{6}\right)} = 3 : \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)}{6} = 3 : \frac{2}{18} = 27.$

Zusatz. Sind Zähler und Nenner zusammengesetzte Zahlen, so muß man sie vorher einzeln durch Vornahme der angezeigten Rechnungsarten reduziren.

I. $\dfrac{(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}) \cdot 6}{6\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot 4}$ bedeutet, daß die Summe von $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{2}$ mit 6 multiplizirt, und dieses Produkt durch jene Differenz dividirt werden soll, welche man erhält, wenn man das Produkt $\frac{2}{3} \times 4$ von $6\frac{1}{2}$ subtrahirt. Also

$$= \frac{\frac{5}{4} \cdot 6}{\frac{13}{2} - \frac{8}{3}} = \frac{\left(\frac{15}{2}\right)}{\left(\frac{23}{6}\right)} = \frac{15}{2} \times \frac{6}{23} = \frac{45}{23}.$$

II. $\dfrac{2\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10}}{(7 - 5\frac{3}{4}) : \frac{3}{8}} = \dfrac{2\frac{1}{2} + \frac{3}{5}}{1\frac{1}{4} : \frac{3}{8}} = \dfrac{3\frac{1}{10}}{\frac{5}{4} \times \frac{8}{3}} = \dfrac{\left(\frac{31}{10}\right)}{\left(\frac{10}{3}\right)} = \frac{31}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{93}{100}.$

C. Stammrechnungsarten mit benannten Brüchen.

§. 63.

Hier müssen als Vorübungen folgende zwei Aufgaben gelöset werden.

I. Aufgabe. Einen benannten Theilbruch höherer Ordnung in die enthaltenen niedrigeren Einheiten aufzulösen (z. B. $\frac{3}{5}$ fl. in Kreuzer).

Auflösung. Man multiplizire den Zähler des gegebenen Bruches mit der Reduktionszahl, d. i. mit dem Ganzen, in den Theilen ausgedrückt, in welchen man den Bruch bestimmen soll, und dividire das Produkt durch den Nenner. — Wenn es angeht, dividirt man kürzer (oder verkleinert bloß) das Ganze durch den Nenner des Bruches, und multiplizirt den Quotus mit dem Zähler.

Beweis. $\frac{3}{5}$ fl. in Kreuzer auflösen, heißt entweder

a) 3 fl. zu Kreuzern machen $3 \times 60 = 180$ Kreuzer, und davon den 5ten Theil nehmen $\frac{180}{5} = 36$ kr.; oder es heißt

b) den fünften Theil von $60 = \frac{60}{5} = 12$ kr. dreimal nehmen, d. i. $12 \times 3 = 36$ kr.

So ist z. B. $\frac{7}{8}$ Pfund $= \frac{7 \cdot \cancel{32} \cdot 4}{\cancel{8}} = 28$ Loth.

$$\tfrac{3}{4} \text{ Zentner} = \frac{3 \cdot \cancel{100} \cdot 25}{\cancel{4}} = 75 \text{ Pfund.}$$

$$\frac{5'}{8} = \frac{5.12''}{8} = \frac{5.3''}{2} = 7\tfrac{1}{2}'' = 7''\ 6''' \text{ dd.}$$

Zusatz. Besteht das Ganze selbst aus mehreren Unterabtheilungen, so wird Alles auf die niedrigste Sorte gebracht.

Z. B. $\frac{4}{11}$ Laubthl. $= \frac{4}{11} \times 165$ kr. $= 4.15 = 60$ kr. $= 1$ fl.

$$\tfrac{7}{9} \text{ Reichsthl.} = \frac{7 \cdot 90}{9} \text{ kr.} = 70 \text{ kr.} = 1 \text{ fl. } 10 \text{ kr.}$$

§. 64.

II. Aufgabe. Einheiten einer niedrigeren Ordnung als Theilbruch der höheren Einheit darzustellen.

Auflösung. Man betrachte die gegebenen niedrigeren Einheiten als den Zähler des Bruches, und schreibe darunter die Reduktionszahl als Nenner. Hierauf verkleinere man den Bruch, wenn es angeht. Die Benennung von der niedigeren Sorte verwandelt sich dann in jene der höheren. — Bestehen die ge-

gebenen Einheiten selbst aus mehreren Unterabtheilungen, so wird im Zähler sowohl als im Nenner Alles auf die niedrigste Sorte gebracht.

Beweis. Man will hier die Theile im Verhältnisse zum Ganzen darstellen; daher müssen beide gleiche Benennung haben. Dieses gibt dann einen eigentlichen Bruch, den man verkleinern darf. Z. B.

$$48\text{ kr.} = \frac{48}{60}\text{ fl.} \overset{12}{=} \frac{4}{5}\text{ fl.}$$

$$75\text{ Pfd.} = \frac{75}{100}\text{ Ztr.} \overset{25}{=} \frac{3}{4}\text{ Ztr.}$$

$$28\text{ Loth} = \frac{28}{32}\text{ Pfd.} = \frac{7}{8}\text{ Pfd.}$$

$$22\text{ kr. } 2\text{ pf.} = 90\text{ pf.} = \frac{90}{240}\text{ fl.} \overset{30}{=} \frac{3}{8}\text{ fl.}$$

$$2''\ 7'''\ 6^{IV}\text{ dd.} = 378^{IV} = \frac{378'}{1728} = \frac{42'}{192} = \frac{7'}{32}$$

$$6\tfrac{4}{5}\text{ kr.} = \frac{6\frac{4}{5}}{60}\text{ fl.} = \frac{(\frac{34}{5})}{60}\text{ fl.} = \frac{17}{150}\text{ fl.}$$

§. 65.

Die Stammrechnungsarten mit benannten Brüchen selbst unterscheiden sich nicht von denen mit unbenannten Brüchen. Die einzelnen Rechnungsarten werden dabei dann angewendet, wenn sie auch angewendet würden, sobald man an die Stelle der Brüche ganze Zahlen setzte. Namentlich findet man aus einem Ganzen den einem Theilbruche entsprechenden Theil, wenn man das Ganze durch den Theilbruch multiplizirt.

Beispiele.

I. Jemand hat $2\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 3 und $5\frac{5}{12}$ bayerische Thaler einzufordern, ist dagegen 3, $2\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{5}$, $5\frac{5}{6}$ fl. schuldig. Um wie viel übersteigt das, was er einzufordern hat, seine Schulden?

Auflösung.

$$2\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + 3 + 5\tfrac{5}{12} = 10 + \frac{6+4+5}{12} = 11\tfrac{1}{4}\text{ bayerische Thlr.} =$$

$$11\tfrac{1}{4} \times 2\tfrac{2}{5}\text{ fl.} = \frac{45}{4} \times \frac{12}{5} = 27\text{ fl. hat er einzufordern;}$$

$$3 + 2\tfrac{2}{3} + 4\tfrac{1}{5} + 5\tfrac{5}{6} = 14 + \frac{20+6+25}{30} = 15\tfrac{7}{10}\text{ fl. schuldet er;}$$

$27 - 15\frac{7}{10} = 26\frac{10}{10} - 15\frac{7}{10} = 11\frac{3}{10}$ fl. $= 11$ fl. 18 kr. hat er mehr zu fordern.

II. Nach einem Testamente sollen $3500\frac{4}{5}$ fl. unter 3 Personen so vertheilt werden, daß A $\frac{5}{16}$, B $\frac{3}{8}$ von jener Summe, C den Rest erhalte. Wie viel beträgt der Antheil eines Jeden?

Auflösung.

$3500\frac{4}{5} \times \frac{5}{16} = \frac{17504}{5} \times \frac{5}{16} = \frac{17504}{16} = 1094$ fl. Antheil des A.

$3500\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{6564}{5} = 1312\frac{4}{5}$ fl. Antheil des B.

$3500\frac{4}{5} - (1094 + 1312\frac{4}{5}) = 3500\frac{4}{5} - 2406\frac{4}{5} = 1094$ fl. Antheil des C.

III. Der Flächeninhalt eines kleinen Gärtchens ist $14\frac{2}{5}$ □ Ruthen, die Breite beträgt $3\frac{1}{5}$ Ruthen. Welches ist die Länge?

Auflösung.

$14\frac{2}{5} : 3\frac{1}{5} = \frac{72}{5} \times \frac{5}{16} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$° beträgt die Länge.

IV. In einem Dorfe sind 8 ganze, 11 halbe, 8 Drittel-, 9 Viertel- und 10 Achtel-Bauernhöfe; wie viel ganze Höfe sind es?

Antw. $19\frac{2}{3}$.

V. Von einer Schuld wurden $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{9}$ bezahlt; der wievielte Theil derselben ist noch zu zahlen? Wenn der Schuldner hievon monatlich $\frac{1}{18}$ der ganzen Schuld bezahlt, in wie viel Monaten wird er jenen Rest abgetragen haben? Wie viel beträgt die ganze Schuld, wenn jener Rest 700 fl. ausmacht?

Antw. a) $\frac{7}{36}$, b) $3\frac{1}{2}$ M., c) 3600 fl.

VI. Was kostet der Verputz eines Zimmers, welches $20\frac{1}{4}'$ lang, $18\frac{3}{4}'$ breit und $13\frac{1}{3}'$ hoch ist, die Quadratklafter (36 □') zu $1\frac{3}{5}$ fl. gerechnet?

Jede der Längenwände hat $20\frac{1}{4} \times 13\frac{1}{3} = 270$ □'
Jede der Breitenwände hat $18\frac{3}{4} \times 13\frac{1}{3} = 250$ □'
Die Decke hat $20\frac{1}{4} \times 18\frac{3}{4} = 379\frac{11}{16}$ □'
Gesammtinhalt $= 270 \times 2 + 250 \times 2 + 379\frac{11}{16} = 1419\frac{11}{16}$ □' $= \frac{22715}{576}$ □ Klafter.
Kostenbetrag $= \frac{22715}{576} \times 1\frac{3}{5} = 63\frac{7}{72}$ fl.

VII. Eine Hausfrau kaufte einen $13\frac{1}{2}$ ℔ schweren Zuckerhut und 9 ℔ Kaffee, 1 ℔ vom ersteren zu 32 kr., vom letzteren zu 48 kr. Wenn sie nun täglich $4\frac{1}{2}$ Loth Zucker und $2\frac{1}{4}$ Loth

Kaffee braucht; wie lange reicht sie mit jedem, und wie viel beträgt die tägliche Ausgabe für Zucker und Kaffee?

Der Zucker reicht $13\frac{1}{2} \times 32 : 4\frac{1}{2} = 96$ Tage.
Der Kaffee reicht $9 \times 32 : 2\frac{1}{4} = 128$ Tage.

$4\frac{1}{2}$ Loth Zucker $= \frac{9}{64}$ ℔ Z. kosten $32 \times \frac{9}{64} = 4\frac{1}{2}$ kr.
$2\frac{1}{4}$ Loth Kaffee $= \frac{9}{128}$ ℔ K. kosten $48 \times \frac{9}{128} = 3\frac{3}{8}$ kr.
Beide zusammen kosten $4\frac{1}{2} + 3\frac{3}{8} = 7\frac{7}{8}$ kr.

II. Hauptstück.

Von den Dezimalbrüchen.

Vorbegriffe und Vorübungen.

§. 66.

1) Die unter die Einheit fortgesetzte Dekadik führt auf die Dezimal- oder zehntheiligen Brüche. Gleichwie nämlich von der Rechten zur Linken jede nächsthöhere Zifferstelle das Zehnfache der vorhergehenden ist: so muß auch umgekehrt von der Linken zur Rechten jede nächstniedrige Zifferstelle den zehnten Theil der vorhergehenden betragen. Nach diesem Gesetze kann man die Zahlen auch unter die Einheit fortgebildet annehmen. Auf die Stelle der Einheiten folgen dann die Zehntel, Hundertel, Tausendtel ꝛc. Solche unter die Einheit nach dem Dezimalsysteme fortgesetzte Zahlen geben die Dezimalen.

2) Dezimalbrüche sind demnach Brüche, welche 10, 100, 1000.... zum Nenner haben. Der Nenner wird dabei gewöhnlich nicht angeschrieben, sondern dadurch kennbar gemacht, daß man die Ganzen und den Zähler des Bruches durch ein Komma trennt, welches von der Rechten zur Linken nach so viel Ziffern gesetzt wird, als der Nenner Nullen erhalten müßte, wenn er angeschrieben würde; hat der Zähler nicht so viele Ziffern, so werden diese durch Nullen ersetzt, welche unmittelbar nach dem Komma gesetzt werden. Sind zu den Dezimalen keine Ganze gegeben, so wird deren Abgang ebenfalls durch 0,... angezeigt.

Folgende

Folgende Tabelle stellt das Gesagte deutlicher dar.

Stelle der Tausende.	Hunderte.	Zehner.	Einer.	Zehntel.	Hundertel.	Tausendtel.	10 Tausendtel.	100 Tausendtel.	Millontel.	10 Millontel.
1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10.000}$	$\frac{1}{100.000}$	$\frac{1}{1000.000}$	$\frac{1}{10.000.000}$
	$\frac{1000}{10}$	$\frac{100}{10}$	$\frac{10}{10}$	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001
IV.	III.	II.	I.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

§. 67.

Aufgabe. Dezimalbrüche richtig auszusprechen.

Auflösung. Man kann, nach der Analogie ganzer Zahlen, entweder jede Zifferstelle einzeln, oder die ganze Zahl mit ihrem gemeinschaftlichen Nenner auf einmal aussprechen. Dieser gemeinschaftliche Nenner aber ist jederzeit die Einheit mit so viel Nullen, als der Dezimalbruch Dezimalstellen hat.

a) 4,359 heißt entweder 4 Ganze, $\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{9}{1000}$ oder

4 Ganze $\frac{359}{1000}$.

b) 0,0704 heißt entweder kein Ganzes, $\frac{0}{10}, \frac{7}{100}, \frac{0}{1000}, \frac{4}{10.000}$

oder kein Ganzes $\frac{704}{10.000}$.

Es ist aber $\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{9}{1000} = \frac{300 + 50 + 9}{1000} = \frac{359}{1000} = 0,359.$

§. 68.

Aufgabe. Dezimalbrüche richtig anzuschreiben.

Auflösung. 1) Nach der ersten Sprechart hat man nur die Abwesenheit einer Zahlziffer in einer Zifferstelle, welche zwischen die gegebenen hineinfällt, durch Nullen zu ergänzen.

2) Bei der zweiten Sprechart wird der Dezimalbruch nach §. 66. 2°. angeschrieben. Z. B. 3 Ganze 546 hunderttausendtel wird angeschrieben: 3,00546, weil 100000 5 Nullen, der Zähler aber nur 3 Ziffern hat.

§. 69.

Aus der Natur der Dezimalbrüche lassen sich einfach folgende Sätze ableiten:

1) Nullen haben nach Dezimalen eben so wenig einen Werth, als vor Ganzen, da sie in solchen Stellungen nur die Abwesenheit von Zahlziffern in einer Zifferstelle anzeigen. Z. B.

24 = 0024; 0,5 = 0,5000.

Letzteres ergibt sich auch daraus, daß $\frac{5}{10} = \frac{5000}{10000}$. Man kann daher Dezimalbrüchen willkürlich Nullen anhängen, oder ihnen angehängte Nullen hinweglassen, ohne den Werth derselben zu verändern. Eben so kann man Nullen den Ganzen in Form von Dezimalen anhängen. Z. B. 5 = 5,000.

2) Jede Ziffer nimmt, wenn sie in Beziehung auf den Dezimalstrich von der Linken zur Rechten um 1, 2, 3... Stellen zurückgerückt wird, um das 10, 100, 1000fache ab, hingegen um das eben so Vielfache zu, wenn sie um 1, 2, 3.... Stellen von der Rechten zur Linken vorwärts gerückt wird. Deßhalb wird ein Dezimalbruch durch 10, 100, 1000....

a) dividirt, wenn man das Komma um 1, 2, 3,... Stellen von der Rechten zur Linken vorwärts rückt,

b) multiplizirt, wenn man das Komma um 1, 2, 3,... Stellen von der Linken zur Rechten zurückrückt.

Sollten die gegebenen Ziffern nicht ausreichen, so müßte man die fehlenden durch Nullen ergänzen, welche man bei der Division nach dem Komma, bei der Multiplikation nach den gegebenen Ziffern des Multiplikands setzt. Z. B.

34,65 : 100 = 0, 3465
34,65 : 1000 = 0,03465
34,65 × 10 = 346,5
34,65 × 1000 = 34650.

§. 70.

Aufgabe. Gemeine Brüche in Dezimalbrüche zu verwandeln.

Auflösung. Man hänge dem Zähler so viele Nullen an, als man Stellen im Dezimalbruche bestimmen will; dividire dann mit dem Nenner in den Zähler, und schneide im Quotienten so viele Ziffern als Dezimalen ab, als man Nullen angehängt hat.

Beweis. Bei Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Dezimalbruch sucht man eine Zahl, mit welcher der Nenner multiplizirt 10, 100, 1000.... zum Produkte gibt. Werden mit derselben Zähler und Nenner multiplizirt, so wird der Werth des Bruches nicht verändert, dem Bruche aber die Form eines Dezimalbruches gegeben. Man findet aber jene Zahl, indem man 10, 100, 1000.... durch den gegebenen Nenner dividirt.

Es ist z. B. $\frac{3}{4} = \frac{3.25}{4.25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$. Der Faktor 25 wird aber gefunden, indem man setzt $\frac{3}{4} = \frac{3.100}{4.100} = \frac{3,25}{1.100}$.

Eben so $\frac{2}{3} = \frac{2.1000}{3.1000}$ annähernd $= \frac{2.333}{1.1000} = \frac{666}{1000} = 0{,}666$.

Beispiele. Man verwandle die Brüche: I. $\frac{3}{4}$, II. $\frac{2}{25}$, III. $\frac{1}{3}$, IV. $\frac{15}{22}$ in Dezimalbrüche.

I. 300 | 75
(4)
28
20
(4)
20
ø Also $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

II. 200 | 8
(25)
200
ø
$\frac{2}{25} = 0{,}08$.

III. 3 | 10000 | 3333...
9
10
9
10
9
10
9
1
$\frac{1}{3} = 0{,}3333...$

IV. 22 | 1500000 | 68181...
132
180
176
40
22
180
176
40
22
18
$\frac{15}{22} = 0{,}68181...$

Nur bei solchen Brüchen, deren Nenner 2, 5, oder ein Produkt von jeder dieser beiden Zahlen, entweder mit sich selbst, oder mit der andern ist, z. B. 2.2, 2.2.2, 5.5, 2.5.5 u. s. w., hebt sich die Division, weil nur dann der durch Anhängen von Nullen vergrößerte Zähler ein Vielfaches des Nenners ist. Die daraus hervorgehenden Dezimalbrüche heißt man endliche. Bei allen andern Brüchen hebt sich die Division nie, deßhalb heißt

man die daraus entspringenden Dezimalbrüche unendliche, oder wenn nach einer bestimmten Zahl von Ziffern immer die nämlichen wiederkehrend sind, periodische; die immer wiederkehrenden Ziffern nennt man eine Periode. Ein solcher Dezimalbruch kann gleich mit der Periode beginnen, wie Beispiel III. mit 3, oder es können der Periode andere Ziffern vorausgehen, wie im Beispiele IV. der Periode 81 die Zahl 6 vorausgeht. Letzteres findet Statt, wenn der Nenner durch 2 oder 5 theilbar ist; ersteres, wenn weder 2 noch 5 im Nenner enthalten ist.

Zusatz 1. Der Quotient jeder Division, welche sich nicht hebt, kann durch Dezimalen näher bestimmt werden.

Zusatz 2. Gemeine Brüche können ihrem Werthe nach am leichtesten miteinander verglichen werden, wenn man sie vorher in Dezimalbrüche verwandelt.

§. 71.

Aufgabe. Dezimalbrüche in gemeine Brüche zu verwandeln.

Auflösung. Hiebei unterscheidet man zwischen endlichen und periodischen Dezimalbrüchen

I. Endliche Dezimalbrüche werden in gemeine dadurch verwandelt, daß man den Nenner sichtbar macht, und diese Bruchform, wo möglich, verkleinert. Z. B. $0,625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$.

II. Bei periodischen Dezimalbrüchen hat man zu unterscheiden, ob sie mit der Periode beginnen, oder ob solcher noch andere Ziffern vorhergehen. Im ersten Falle ist der Dezimalbruch einem gemeinen Bruche gleich, welcher eine Periode zum Zähler, und so viele 9 zum Nenner hat, als in der Periode Ziffern stehen. Im zweiten Falle wird der Dezimalbruch in zwei aufgelöset, wovon der erste Bruch ein endlicher, dessen Zähler die nicht zur Periode gehörigen Ziffern, und dessen Nenner 10,100... ausmachen, der zweite ein unendlicher ist. Letzterer ist einem gemeinen Bruche gleich, welcher eine Periode zum Zähler, und zum Nenner so viele Nenner, als in der Periode Ziffern sind, sammt so viel Nullen hat, als der Periode andere Dezimalen vorhergehen. Diese beiden auf gemeine Brüche reduzirten Theile werden nun auf gleiche Benennung gebracht und addirt.

Beispiele.

a) $0,3333... = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

b) $0{,}296296\ldots = \frac{296}{999} = \frac{8}{27}$

c) $0{,}1666\ldots = \frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

d) $0{,}752727\ldots = 0{,}75 + 0{,}002727\ldots = \frac{75}{100} + \frac{27}{9900} = \frac{825 + 3}{1100} = \frac{828}{1100} = \frac{207}{275}$.

Beweis.

a) $0{,}3333\ldots = \frac{9 \times 0{,}3333\ldots}{9} = \frac{(10 - 1) \times 0{,}3333}{9} = \frac{3{,}3333\ldots - 0{,}3333\ldots}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

b) $0{,}296296\ldots = \frac{999 \times 0{,}296296\ldots}{999} = \frac{(100-1) \times 0{,}296296\ldots}{999} = \frac{296{,}296\ldots - 0{,}296\ldots}{999} = \frac{296}{999} = \frac{8}{27}$.

c) $0{,}1666\ldots = \frac{10 \times 0{,}1666\ldots}{10} = \frac{1{,}666}{10} = \frac{1\frac{6}{9}}{10}$ (nach a und b) $= \frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{1}{6}$.

d) $0{,}752727\ldots = \frac{100 \times 0{,}752727\ldots}{100} = \frac{75{,}2727}{100} = \frac{75\frac{27}{99}}{100} = \frac{75}{100} + \frac{27}{9900}$.

B. Rechnungsarten mit unbenannten Dezimalbrüchen.

I. Addition und Subtraktion.

§. 72.

Aufgabe. Dezimalbrüche zu addiren und subtrahiren.

Auflösung. Man schreibe die zu addirenden, oder zu subtrahirenden Größen so untereinander, daß sowohl bei Ganzen, als bei Dezimalen gleichartige Zifferstellen unter sich zu stehen kommen (dieß geschieht, wenn die Kommate der Dezimalen in senkrechter Linie über einander stehen), und verfahre dann ganz wie bei der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen. Sollten im Subtrahend mehr Dezimalstellen gegeben seyn, als im Minuend, so ergänze man vorher im letztern die fehlenden Stellen

durch Nullen. — Beide Rechnungsarten dienen sich auch hier wieder zur Probe.

Beispiele. I. 6,3409 + 4,5001 + 18,3 + 0,007.
II. 13,047 — 8,356.
III. 12 — 5,9368.

Auflösung. I. 6,3409
4,5001
18,3
0,007
29,1480 Summe.

Probe. xx x—

II. 13,047	III. 12,0000
—8,356	—5,9368
4,691.	6,0632.
Probe. 13,047.	Probe. 12,0000 = 12.

II. Multiplikation.

§. 73.

Aufgabe. Dezimalbrüche zu multipliziren.

Auflösung. I. Man multiplizire die Dezimalbrüche wie ganze Zahlen, ohne auf das Komma der Ganzen Rücksicht zu nehmen.

II. Im Produkte schneide man so viele Dezimalstellen von der Rechten zur Linken ab, als die Anzahl der Dezimalstellen in den Faktoren zusammen beträgt.

III. Sollte das Produkt nicht so viele Zifferstellen enthalten, als abzuschneiden sind, so ersetze man die abgängigen durch vorangesetzte Nullen (mit dem 0, als dem Zeichen von fehlenden Ganzen).

Beweis. Stellt man die beiden Faktoren dadurch, daß man die Nenner sichtbar macht, als gemeine Brüche dar, und multiplizirt sie als solche, so erhält man zum Produkte einen Bruch, dessen Zähler das Produkt der gegebenen Zähler, und dessen Nenner das Produkt der gegebenen Nenner, also 1 mit so viel angehängten Nullen ist, als die beiden Faktoren im Nenner Nullen, oder als sie Dezimalstellen haben. Läßt man den Nenner des Produktes hinweg, so müssen eben so viele Ziffern als Dezimalen abgeschnitten werden. Z. B.

$$0{,}14 \times 0{,}06 = \frac{14}{100} \times \frac{6}{100} = \frac{84}{10000} = 0{,}0084.$$

$$12{,}5 \times 0{,}08 = \frac{125}{10} \times \frac{8}{100} = \frac{1000}{1000} = 1{,}000 = 1.$$

* Die Multiplikationsbeispiele lassen sich durch die Neuner- oder durch die Divisionsprobe prüfen.

Beispiele. 1) 0,35 × 7,21.

Auflösung.

```
  7,21
  0,35
------
  3605
 2163
------
2,5235
```

Probe.

2) 0,00125 × 0,08 × 0,03.

Auflösung. .... 125 × 8 × 3 = 3000, mithin
0,00125 × 0,08 × 0,03 = 0,000003000 = 0,000003.

§. 74.

Hat jeder der Faktoren 4, 5, oder noch mehr Dezimalen, und will man nur die höchsten 5, 6 ꝛc. Dezimalen des Produktes erfahren, was auch in den meisten Rechnungsfällen ausreicht, so wendet man die abgekürzte Multiplikation in folgender Art an:

Man multiplizirt mit der höchsten Ziffer des Multiplikators das ganze Multiplikand, dann mit der zweiten Ziffer des Multiplikators das Multiplikand mit Ausnahme der letzten Ziffer, ferner mit der dritten Ziffer des Multiplikators das Multiplikand mit Ausnahme der zwei letzten Ziffern u. s. w. Die erste, zur Rechten stehende Ziffer der Partialprodukte wird dadurch näher bestimmt, daß man die Zehner des Produktes, welches die letzte hinweggelassene Ziffer des Multiplikands mit einer Ziffer des Multiplikators geben würde, hinzuzählt. Die Partialprodukte werden immer so angeschrieben, daß ihre niedrigsten Ziffern unter einander zu stehen kommen. Der Lokalwerth der einzelnen Ziffern im Totalprodukte richtet sich nach der Differenz zwischen der Anzahl aller Ziffern und der abzuschneidenden Dezimalen im vollständigen Produkte. Enthält das nach Obigem gefundene abgekürzte Produkt eine Ziffer mehr, als das Multiplikand, so ist die Anzahl aller Ziffern des vollständigen Produktes gleich der Anzahl der Ziffern in beiden Faktoren; um 1 kleiner wird jene seyn, wenn

das abgekürzte Produkt eben so viele Ziffern enthält, als das Multiplikand. Um wie viel Ziffern nun das vollständige Produkt mehr enthielte, als Dezimalen abzuschneiden wären, so viel Ziffern sind von der Linken zur Rechten als Ganze abzuschneiden. Erhielte das vollständige Produkt weniger Ziffern, als Dezimalen, so sind auch im abgekürzten nach dem Komma Nullen zu setzen.

```
Beispiele.  3,716048
              80,538
           ---------
            29728384
              185802
               11148
                2972
           ---------
           299,28306
```

Zuerst wurde 3716048 mit 8 multiplizirt, dann weil 371604 × 0 = 0 gäbe, wurde gleich 37160 mit 5 multiplizirt, und hier zu 5 × 0 = 0 . . . . . 2 addirt, weil das zuletzt hinweggelassene 4 mit 5 multiplizirt 2 Zehner gibt, u. s. w. Das abgekürzte Produkt hat 8 Ziffern, um eine mehr, als das Multiplikand, das vollständige Produkt erhielte also 7 + 5 = 12 Ziffern und von diesen 6 + 3 = 9 Dezimalen; also sind 12 — 9 = 3 Ziffern als Ganze abzuschneiden.

Nach der im §. 18. angegebenen zweiten Multiplikationsart und mit Bezeichnung der hinwegzulassenden Ziffern ergibt sich nachstehende vollständige Multiplikation des obigen Beispiels.

```
     3,716048
       80,538
    -------------
     29728384|
     ......0|0
      185802|40
       11148|144
        2972|8384
    -------------
    299,2807|3824
```

Nur die letzte Ziffer im obigen abgekürzten Produkte ist kleiner, als die entsprechende Ziffer im vollständigen Produkte.

```
      3,462378
      0,026542
    ----------
       6924756
       2077426
        173118
         13849
           692
    ----------
    0,09189841
```

Das vollständige Produkt erhielte $(7+5)-1=11$ Ziffern und 12 Dezimalen, also wäre bei demselben nach dem Komma eine Nulle zu setzen, welche nun auch hier nicht übersehen werden darf.

III. Division.

§. 75.

Aufgabe. Dezimalbrüche zu dividiren.

Auflösung. Man dividire die Dezimalen wie ganze Zahlen, ohne auf das Komma der Ganzen Rücksicht zu nehmen. Im Quotus schneide man so viele Dezimalstellen ab, als die Differenz zwischen den Dezimalstellen des Dividends und Divisors beträgt, und ergänze die im Quotus allenfalls fehlenden Dezimalstellen durch vorangesetzte Nullen.

Beweis. Jedes Dividend läßt sich betrachten als ein Produkt aus dem Divisor und Quotienten, folglich muß es die Summe der Dezimalstellen seiner beiden Faktoren enthalten. Es ist also leicht zu begreifen, daß die Dezimalstellen im Quotus nur die Differenz zwischen den Dezimalstellen des Dividends und denen des Divisors betragen müssen.

Diese allgemeine Divisionsregel modifizirt sich nun für folgende drei Fälle also:

1°. Haben Dividend und Divisor gleichviel Dezimalstellen, so enthält der Quotus (so lange man aus dem Dividende neue Zifferstellen herabsetzen kann) lauter Ganze. Z. B.

$$1{,}44 : 0{,}12 = 12. \quad \text{Denn } \frac{144}{100} \times \frac{100}{12} = 12.$$

(im Druck sind die Nullen von 100 in beiden Brüchen durchgestrichen)

2°. Hat der Divisor mehr Dezimalstellen, als das Dividend, so hängt man dem Dividend so viele Nullen an, als der Divisor mehr Dezimalstellen hat, wornach der Quotus wie in 1° aus Ganzen besteht.

$$\text{Z. B. } 64 : 0{,}8 = 64{,}0 : 0{,}8 = \frac{640}{10} \times \frac{10}{8} = 80.$$

(im Druck ist die Null von 10 in beiden Brüchen durchgestrichen)

3°. Hat das Dividend mehr Dezimalstellen als der Divisor, so hat man im Quotus so viele Dezimalstellen abzuschneiden, als das Dividend mehr hat.

Anmerkung. Da man bei der Division mit Dezimalbrüchen nicht allezeit zuverlässig bestimmen kann, ob die Rechnung rein aufgeht, so ist es am bequemsten, alle Divisionsbeispiele auf den dritten Fall zu reduziren, und zu diesem Ende dem

Dividende so viele Nullen anzuhängen, daß die Dezimalstellen desselben der Zahl nach — zwei oder drei — mehr betragen, als jene des Divisors.

Zusatz. Die Divisionsbeispiele werden auch hier durch die Multiplikation geprüft.

Beispiele.

I. 4565,33 : 59,29.
II. 129,6 : 0,072.
III. 0,01728 : 36.
IV. 37,8 : 45.
V. 5 : 0,14.

Auflösung.

```
I.    4565,33 | 77
        59,29 -|-
       41503  |
     ---------  b
       41503
        5929
       41503
     ---------
          0.
```

Probe. 59,29 × 77 = 4565,33.

```
II.   129,600 | 1800
         72   -|-
     ---------
        576   |
         72     b
        576
     ---------
          0.
```

Probe. 1800 × 0,072 = 129,600 = 129,6.

```
III.  0,01728 | 48 . . . Quotus 0,00048.
          36  -|-
         144    b
     ---------
         288
          36
         288
     ---------
          0.
```

Probe. 0,00048 × 36 = 0,01728.

```
IV.    37,800 | 0,840 = 0,84
          45  -|-
         360    b
     ---------
         180
          45
         180
     ---------
          0.
```

```
V.    5,00000   | 35714
      0,14     -|-
       42       b
      ------
        80
        70
      ------
        100
         98     Probe.
      ------
         20     (35,714)×0,14 = 4,99996
         14                         + 4
      ------                  ----------
         60                   5,00000 = 5.
         56
      ------
      Rest 4
```

Also $5 : 0{,}14 = 35{,}714\ldots$

VI. $17{,}28 : 0{,}36 = 48$

VII. $172{,}8 : 0{,}036 = 4800$

VIII. $1{,}728 : 0{,}36 = 4{,}8$

IX. $0{,}001728 : 0{,}036 = 0{,}048$

§. 76.

Auch die Division läßt sich, wenn man nur einen Näherungswerth erhalten will, in abgekürzter Art vornehmen.

Die Methode ist folgende:

Um die erste Ziffer des Quotus zu finden, dividirt man mit dem ganzen Divisor, wie gewöhnlich; um die zweite, dritte, vierte... Ziffer des Quotus zu finden, läßt man aber nach und nach eine, zwei, drei, vier Zifferstellen vom Divisor zur rechten Hand fallen, dividirt mit demselben in den jedesmaligen Rest, ohne zu diesem vorher eine neue Stelle oder Null gesetzt zu haben. Jedoch hat man zum Produkte der jedesmaligen niedrigsten Stelle jene Zehnereinheiten zu addiren, welche von dem Produkte aus dem Quotus und der hinweggeworfenen nächst vorhergehenden, niedrigeren Zifferstelle hinübergefallen waren.

Den Lokalwerth der Ziffern im Quotus bestimmt man nach §. 75. am leichtesten in dem Momente, bevor man vom Divisor eine Ziffer hinwegläßt.

Beispiele.

a) $\frac{7{,}632035}{3{,}716048}$ b) $\frac{2{,}0000000}{15{,}314866}$.

a) Operation.

```
7,632035 (2,0538
(3,716048)
7,432096
---------
 199939*
 (37160)
 185802**
---------
   14137
  (3716)
   11148
---------
    2989
   (371)
    2972
```

Erklärung. * in $\frac{199939}{371604}$ ist der Quotus 0.

** Die Ziffer 2 ist herübergezählt; 4 × 5 = 20 bleiben 2 Zehner: 5 × 0 = 0 kommt 2 an die Stelle der Null.

Operation.

```
b) (1|5,|3|1|4|8|6|6)  2,0000000  |  0,13059209
                       1 5314866 -|-
                       ---------  |
                         4685134  |
                         4594459  b
                       ---------
                           90675
                           76574
                       ---------
                           14101
                           13782
                       ---------
                             319
                             306
                       ---------
                              13
                              13
                       ---------
                              0.
```

C. Rechnung mit benannten Dezimalbrüchen.

§. 77.

Bei uns ist bis jetzt nur das geometrische Längen-, Flächen- und Körpermaß nach dem Dezimalsysteme abgetheilt; deßhalb lassen sich unmittelbar nur von diesem die Unterabtheilungen als Dezimalbrüche höherer Abtheilungen darstellen.

So ist $9^\circ 6' 5'' 6'''$ geometrischen Längenmaßes $= 9^\circ 656''' = 9\frac{656^\circ}{1000}$ $= 9{,}656^\circ = 96{,}56' = 965{,}6''$.

$24\square^{\circ}\ 26\square'\ 8\square''\ 27'''$ dc. $= 24\frac{260827^{\circ}}{1000000}\square = 24{,}260827^{\circ}\square$

$= 2426{,}0827'\square = 242608{,}27''\square$.

$5^{c\circ}\ 136^{c'}\ 48^{c''}$ dc. $= 5{,}136048^{c\circ} = 5136{,}048^{c'}$.

Bei solchen, nach dem Dezimalsysteme abgetheilten, benannten Zahlen ist das Reduziren und Resolviren sehr einfach. Deßhalb wurden auch in Frankreich alle Maß- und Gewichts-, so wie Münz- und Kreis-Eintheilungen rc. nach jenem Systeme bestimmt. Vergl. Tab. Abthl. II. X.

Die Rechnung mit Dezimalbrüchen ist auch in vielen andern Fällen einfacher, als die mit gemeinen Brüchen. So fordert z. B. die Addition von solchen gemeinen Brüchen, deren Nenner keine oder wenige Faktoren miteinander gemein haben, auf gewöhnliche Weise vorgenommen, mehr Zeit und Mühe, als wenn sie in Dezimalbrüche aufgelöset, und als solche addirt werden.

§. 78.

I. Um benannte Zahlen als Dezimalbrüche von höherer Ordnung darzustellen, verwandle man sie in gemeine Brüche von derselben Ordnung, und die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche. Z. B.

24 kr. 5 pf. $= 99$ pf. $= \frac{99}{240} = \frac{33}{80} = 0{,}4125$ fl.

25 ℔ 8 Loth $= 808$ L. $= \frac{808}{3200} = \frac{101}{400} = \frac{101}{4.100} = \frac{25{,}25}{100} = 0{,}2525$ Ctr.

II. Benannte Dezimalbrüche werden in die enthaltenen niedrigeren Einheiten aufgelöset, wenn man sie mit der Reduktionszahl multiplizirt. Z. B.

$0{,}6534$ Jahre $= 0{,}6534.365$ Tage $= 238{,}491$ Tage $= 238^{d} + 0{,}491 \times 24$ Stunden $= 238^{d}\ 11{,}784^{h} = 238^{d}\ 11^{h}\ 47{,}04' = 238^{d}\ 11^{h}\ 47'2{,}4''$.

§. 79.

Eine besondere Erwähnung verdient, daß man durch eine ähnliche Reduktion 1) das Duodezimalmaß in Dezimalmaß, und 2) umgekehrt, dieses in jenes verwandeln kann. Da nämlich jedem dieser Maßsysteme dieselbe Einheit, der Fuß, zu Grunde liegt, so reduzirt man Ruthen, Zolle, Linien auf den Fuß, und verwandelt bei der ersten Aufgabe den dabei vorkommenden gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch, und verfährt dann nach §. 77. Bei der zweiten Aufgabe multiplizirt

man den Dezimalfuß-Bruch mit der Reduktionszahl 12,144,1728 u. s. w. Vergl. §. 78.

Beispiele.

I. $5^{\circ}\,6'\,5''\,6'''$ Duodezimalmaßes $= 66\frac{68'}{144} = 66\frac{17'}{36} = 66{,}4722' \ldots$ $= 6^{\circ}\,6'\,4''\,7{,}22'''$ Dezimalmaßes.

II. $5\square'\ 60\square''\ 40\square'''$ dd. $= 5'8680\square'''$ dd. $= 5\frac{8680}{20736}\square'$ $5\frac{1085}{2592}\square' = 5{,}41859\square' = 5\square'\ 41\square''\ 85\square'''\ 90\square''''$ dc.

III. $90\ c''$ dd. $= \frac{90\ c'}{1728} = \frac{10\ c'}{192} = \frac{5\ c'}{96} = 0{,}052083\ c' = 52\ c''$ $83\ c'''$ Dz.-M.

IV. $6\square'\ 60\square''\ 44\square'''$ dc. $= 6{,}6044\square' = 6\square' + 0{,}6044.144$ $\square''$ dd. $= 6\square'\ 87{,}0336\square''$ dd. $= 6\square'\ 87\square'' + 0{,}0336$ $\times\ 144\square''' = 6\square'\ 87\square''\ 4{,}8384\square'''$ dd.

§. 80.

Die übrigen Regeln der Rechnung mit benannten Dezimalbrüchen ergeben sich aus den für Dezimalbrüche und benannte Zahlen überhaupt geltenden Regeln.

Beispiele. I. Ein Landmann besitzt an Feldgründen: 12,25, 9,754, 10,146, 0,95, 9,4, 6,5 Tagwerk; an Wiesgründen: 12,5, 9,128, 10,025 Tagwerk; an Waldgründen: 25,7 und 5,18 Tagwerk. Wie viel besitzt er an Feld-, Wies- und Waldgründen, einzeln und insgesammt; wie viel mehr an Feld-, als an Wies- und Waldgründen? Wie viel ist sein Besitzthum werth, wenn 1 Tagwerk der Feldgründe zu 200 fl., der Wiesgründe zu 150 fl. und der Waldgründe zu 100 fl. angeschlagen wird?

Auflösung.

Feldgründe: 12,25 + 9,754 + 10,146 + 0,95 + 9,4 + 6,5 = 49 Tagwerk

Wiesgründe: 12,5 + 9,128 + 10,075 = 31,703 „ „

Waldgründe: 25,7 + 5,18 = 30,88 „ „

111,583 Tagwerk

49 — 31,703 = 17,297 Tagw. Feldgründe mehr, als Wiesgründe.

49 — 30,88 = 18,12 „ „ „ „ „ Waldgründe.

Die Feldgründe sind werth	49 × 200 =	9800 fl.
Die Wiesgründe sind werth	31,703 × 150 =	4755,45 fl.
Die Waldgründe sind werth	30,88 × 100 =	3088 fl.
		17643,45 fl.

II. Es soll von Ziegelsteinen eine Mauer aufgeführt werden, welche 12,5' hoch, 1,75' dick und 30,8' lang werde; wie viel Ziegelsteine hat man, ohne den Mauerband dabei in Anschlag zu bringen, nöthig, wenn jeder 1,04' lang, 0,5' breit und 0,25' dick ist?

Auflösung.

Inhalt der Mauer: 12,5 × 1,75 × 30,8 = 673,75 c'
Inhalt eines Ziegelsteines: 1,04 × 0,5 × 0,25 = 0,13 c'
Anzahl der Ziegelsteine: 673,75 : 0,13 = 5183 (nahe zu)

III. Man findet den Umkreis eines Zirkels, wenn man dessen Durchmesser mit der Zahl 3,1415 = π multiplizirt. Welches ist nun der Umkreis eines Kirchenrundels, dessen Durchmesser = 2° 5' 4" Dez.-Maß ist?

Auflösung.

25,4' × 3,1415 = 79,79410' = 7° 9' 7" 9,41''' ist der Umkreis.

IV. Das spezifische Gewicht des Schmiedeisens ist = 7,788, d. i. dieses ist 7,788 mal so schwer, als destillirtes Wasser vom nämlichen Kubikinhalte; 1 Kubikfuß des letzteren wiegt aber 44,17 bayer. Pfund. Wie schwer ist ein Klumpen Schmiedeeisen, der 2 c' 288 c" Ddz.-Maß hat?

Auflösung.

1 c' Eisen wiegt 44,17 × 7,788 = 344 ℔ (annähernd)
Kubikinhalt = 2 c' 288 c" Ddz. = 2,1666 c'
Gesammtgewicht = 344 × 2,1666 = 745,31 ℔ = 7 Ctr. 45 ℔ 9 Loth 3 Qt.

V. Welchen Kubikinhalt hat ein Stück Blei, welches 12 Ctr. 48 ℔ 16 L. wiegt, da das spez. Gewicht des Bleies = 11,352 ist?

Auflösung.

Gewicht des ganzen Stückes Blei = 12 Ctr. 48 ℔ 16 L. = 1248,5 ℔
Gewicht von 1 c' Blei = 44,17 × 11,352 = 501,42 ℔
Kubikinhalt = 1248,5 : 501,42 = 2,4898 c' = 2 c' 846 c" 622 c''' Ddz.

III. Hauptstück.

Von den Kettenbrüchen.

§. 81.

Kettenbrüche sind Brüche, von denen der Zähler 1 ist, und der Nenner aus einer ganzen Zahl nebst einem Bruche besteht, der Zähler dieses Bruches wieder 1, und der Nenner eine ganze Zahl sammt einem Bruche ist, dessen Zähler 1, und dessen Nenner auf dieselbe Art zusammengesetzt ist; es mag diese Verkettung ohne Ende fortgehen, oder irgenwo abbrechen. Z. B.

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}$$

Sie dienen, Brüche, so wie Verhältnisse zweier Zahlen, namentlich solcher, wodurch Maße und Gewichte verschiedener Länder miteinander verglichen werden, in einer kleineren, den wahren Werth derselben annäherungsweise ausdrückenden Form darzustellen, unbestimmte Aufgaben zu lösen u. s. w.

§. 82.

Aufgabe. Gemeine (oder Dezimal-) Brüche in Kettenbrüche zu verwandeln.

Auflösung. Man dividire, wie bei Auffindung des größten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen (vergl. §. 33.), den Nenner durch den Zähler, diesen durch den in der vorigen Division etwa bleibenden Rest, und mache so immer den vorigen Divisor zum Dividend, und den letzten Rest zum Divisor. Die jedesmaligen Quotienten und der letzte Rest werden angeschrieben als die Nenner von Brüchen, deren Zähler 1 ist. Aus

unechten

unechten Brüchen werden vorher die Ganzen gezogen; Dezimalbrüche in gemeine Brüche verwandelt. Z. B.

$$\frac{351}{965}=\cfrac{1}{2+\cfrac{263}{351}}\;\Bigg|\;\frac{263}{351}=\cfrac{1}{1+\cfrac{88}{263}}\;\Bigg|\;\frac{88}{263}=\cfrac{1}{2+\cfrac{87}{88}}\;\Bigg|\;\frac{87}{88}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{87}}.$$

Daher ist $\frac{351}{965}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{87}}}}}$ Eben so $\frac{435}{212}=2+\cfrac{1}{19+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$

§. 83.

Aus den Kettenbrüchen findet man die Näherungswerthe, wenn man bei der ganzen Zahl eines zusammengesetzten Nenners abbricht, den letzten gemischten Nenner auf die gemeine Bruchform bringt, den neuen gemischten Nenner eben so behandelt, und auf diese Weise bis zum ersten Partialbruche fortfährt. Von obigem ersten Beispiele ist der erste Näherungswerth $\frac{1}{2}$ schon gegeben;

der zweite $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}=\cfrac{1}{\left(\frac{3}{1}\right)}=\frac{1}{3}$

der dritte $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3}}=\cfrac{1}{\left(\frac{8}{3}\right)}=\frac{3}{8}$

der vierte $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\left(\frac{3}{1}\right)}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4}}=\frac{4}{11}.$

Nähme man auch noch den Rest 87, und behandelte diesen Bruch in gleicher Art, so erhielte man den gegebenen Bruch $\frac{351}{965}$.

Kürzer werden die Näherungswerthe so gefunden, daß man über einem horizontalen Striche die Quotienten, unter jenem vor einen senkrechten Strich den Bruch $\frac{0}{1}$, und nach diesem als ersten Näherungswerth einen Bruch anschreibt, welcher zum Zähler 1, und zum Nenner den ersten Quotienten hat. Den zweiten, dritten, vierten ꝛc. Näherungswerth findet man, wenn man mit dem

zweiten, dritten, vierten 2c. Quotienten den Zähler und Nenner des zunächst vorhergehenden Näherungsbruches multiplizirt, und dann zu Zähler und Nenner den Zähler und Nenner des jedesmaligen vorletzten Bruches addirt. Nach dieser Methode ergibt sich folgende Form für obiges Beispiel:

$$\frac{0}{1}\left|\begin{array}{ccccc} 2, & 1, & 2, & 1, & 87 \\ \hline \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{3}{8}, & \frac{4}{11}, & \frac{351}{965} \end{array}\right.$$

Die Rechnung angezeigt

$$\frac{1.1+0}{2.1+1}, \frac{1.2+1}{3.2+2}, \frac{3.1+1}{3.1+3}, \frac{4.87+3}{11.87+8}.$$

II. Beispiel. Man verwandle die Zahl 3,1415926535..., welche den Umfang des Kreises angibt, dessen Durchmesser = 1 ist, in einen Kettenbruch, und bestimme die Näherungswerthe davon.

Auflösung. Von dem Bruche $0{,}1415926535 = \frac{1415926535}{10000000000}$ sind die Quotienten 7, 15, 1, 292, 1.... Also

$$0{,}1415926 = \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}}$$

$$\frac{0}{1}\left|\begin{array}{cccc} 7, & 15, & 1, & 292 \\ \hline \frac{1}{7}, & \frac{15}{106}, & \frac{16}{113} & \frac{4687}{33102} \end{array}\right.$$

Die Näherungswerthe von 3,1415926535... sind demnach

$$3 = \frac{3}{1},\ 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7},\ 3\frac{15}{106} = \frac{333}{106},\ 3\frac{16}{113} = \frac{355}{113},\ 3\frac{4687}{33102} = \frac{103993}{33102}\ldots$$

Anmerkung. Der Grund dieses abgekürzten Verfahrens wird bei der Buchstabenrechnung angegeben.

§. 84.

Für Kettenbrüche gelten noch folgende wichtige Sätze, welche theils aus dem Vorausgehenden abgeleitet, theils durch Beispiele erläutert werden können.

1) Haben Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler, so findet sich dieser und der wahre Werth des Bruches in der kleinsten Form auf die nämliche Weise.

2) Von jedem Näherungswerthe sind Zähler und Nenner Primzahlen unter sich.

3) Der erste, dritte, fünfte ꝛc. Näherungswerth eines echten Bruches sind größer; der zweite, vierte ꝛc. kleiner, als der gegebene Bruch. Dieses gründet sich darauf, daß ein Bruch durch Vergrößerung des Nenners kleiner, und durch Verminderung desselben größer wird. Bei unechten Brüchen gilt das umgekehrte Verhältniß.

4) Der Unterschied zwischen je zwei aufeinander folgenden Näherungswerthen ist gleich einem Bruche, dessen Zähler = 1, und dessen Nenner das Produkt der Nenner der beiden Näherungswerthe ist; derselbe wird deßhalb, da die Näherungswerthe eine immer größer werdende Form, also auch einen immer größeren Nenner erhalten, immer kleiner werden. Daher wird sich auch

5) jeder folgende Näherungswerth immer weniger vom Werthe des gegebenen Bruches unterscheiden, der letzte Näherungswerth dem gegebenen Bruche gleich werden.

6) Ist der gegebene Bruch ein unendlicher Dezimalbruch, so kann man denselben nie vollständig durch Näherungswerthe erhalten.

Das dritte und fünfte Gesetz können erlaütert werden, wenn man den gegebenen Bruch und die Näherungswerthe in Dezimalbrüche verwandelt, und diese miteinander vergleicht.

Im ersten Beispiele ist

der gegebene Bruch $\frac{351}{965} = 0{,}36373057\ldots.$
der erste Näherungswerth $\frac{1}{2} = 0{,}5,$
der zweite „ „ $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots..,$
der dritte „ „ $\frac{3}{8} = 0{,}375,$
der vierte „ „ $\frac{4}{11} = 0{,}3636\ldots.;$

also $\frac{1}{2} > \frac{351}{965}, \quad \frac{1}{3} < \frac{351}{965}, \quad \frac{3}{8} > \frac{351}{965}, \quad \frac{4}{11} < \frac{351}{965}.$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2.3}, \quad \frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{8.3}, \quad \frac{3}{8} - \frac{4}{11} = \frac{1}{8.11}.$$

III. Artikel.

Vom Potenziren und Wurzelausziehen.

A. Vorbegriffe.

§. 85.

Eine Zahl potenziren, zu einer Potenz erheben, heißt, sie so oft als Faktor setzen, oder so oft weniger einmal mit sich multipliziren, als eine andere angibt. Z. B. 3 zur vierten Potenz erheben heißt, 3 viermal als Faktor setzen, oder dreimal mit sich multipliziren, was $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ gibt. Für diese Rechnungsart hat man folgende Benennungen und Bezeichnung. Die zu potenzirende Zahl heißt man Grundzahl, Dignand; die Zahl, welche die Anzahl der gleichen Faktoren ausdrückt, Exponent; das (wirklich oder formell bestimmte) Produkt gleicher Faktoren Potenz. Den Exponenten schreibt man rechts, gewöhnlich mit etwas kleinerer Schrift, über den Dignand. Obiges Beispiel wird geschrieben: $3^4 = 81$; dabei heißt 3 der Dignand, 4 der Exponent und 3^4 oder 81 Potenz. Der Dignand heißt in Rücksicht auf die Potenz auch Wurzel. Ist der Exponent 2, 3, 4, so heißt die Potenz insbesondere Quadrat, Kubus, Biquadrat.

Aus einer Zahl eine Wurzel ausziehen heißt, sie in eine bestimmte Anzahl gleicher Faktoren zerlegen oder eine Zahl suchen, welche zur gleichvielten Würde erhoben die gegebene Zahl wieder gibt. Um diese Rechnungsart zu bezeichnen, setzt man der gegebenen Zahl das Zeichen $\sqrt{\ }$ vor, und schreibt in dieses die Zahl der gleichen Faktoren, in welche jene zerlegt werden soll. Die zuletzt genannte Zahl heißt man Wurzelexponenten. Hiernach ist $\sqrt[4]{81} = 3$, 4 der Wurzelexponent. Man nennt auch hier die Wurzel Quadrat- und Kubikwurzel, wenn der Wurzelexponent 2 und 3 ist. Der Wurzelexponent 2 wird gewöhnlich ausgelassen. Also $\sqrt{9} = 3$ heißt: die Quadratwurzel aus 9 ist 3; es ist auch $3 \times 3 = 9$.

Anmerkung. Das Zeichen $\sqrt{\ }$ kommt her vom r, dem Anfangsbuchstaben des Wortes radix.

§. 86.

Aus Obigem ergeben sich nun einfach nachstehende Sätze:

1) Es ist für

die Zahl	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
das Quadrat	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100
der Kubus	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000

2) Ein Bruch wird zu einer Potenz erhoben, wenn man Zähler und Nenner einzeln dazu erhebt.

$(\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$; $(2\frac{2}{5})^2 = (\frac{12}{5})^2 = \frac{144}{25}$

$(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$

3) Ein Dezimalbruch wird zu einer Potenz erhoben, wenn man vorerst die Dezimalen als Ganze betrachtet, als solche (ohne Rücksicht auf das Komma) potenzirt, und dann bei dem Quadriren zweimal, bei dem Kubiren dreimal rc. so viel Ziffern abschneidet, als der Dignand Dezimalen hat.

$(0{,}2)^2 = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$

$(0{,}02)^2 = 0{,}0004$; $(1{,}2)^2 = 1{,}44$

$(0{,}3)^3 = 0{,}027$; $(0{,}01)^3 = 0{,}000001$

B. Quadrat und Quadratwurzel.

§. 87.

Um für das Ausziehen der Quadratwurzel (dieses gilt auch von der Kubikwurzel) allgemeine Gesetze angeben zu können, muß vorerst das Bildungsgesetz des Quadrates von zwei- und mehrzifferigen Zahlen im Allgemeinen entwickelt werden. Zu diesem Zwecke hält man es für zweckmäßig, Folgendes aus der Buchstabenrechnung anzuführen.

1) Zahlen, deren Einheiten nicht genau bestimmt sind, heißen allgemeine (im Gegensatze zu den bisher betrachteten besonderen, bei welchen nämlich die Zahl der Einheiten bestimmt ist), und werden durch Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabetes bezeichnet. Mittelst solcher wird daher nur eine bestimmte Verbindung von Zahlen, kein bestimmter Werth ausgedrückt.

2) Die Verbindungsart zweier allgemeinen Zahlen wird durch die früher angegebenen Zeichen ausgedrückt; so heißt $a + b$ die Summe zweier Zahlen, $a \times b$ oder $a . b$ oder auch ab das Produkt zweier Zahlen; $(a + b)^2$ das Quadrat aus der Summe zweier Zahlen, deren erste a und deren zweite b ist.

3) Soll die nämliche Zahl öfters als Summand gesetzt werden, so drückt man dieß durch eine derselben vorgesetzte Zahl aus, welche man Koeffizienten nennt. Z. B. $a + a + a = 2a + a = 3a$; hier ist 3 der Koeffizient. Ist kein Koeffizient angegeben, so ist als solcher 1 anzunehmen.

4) Der Exponent drückt auch hier aus, wie oft eine Zahl als Faktor gesetzt werden soll, so daß $a.a = a^2$; $a.a.a = a^3$; eben deßhalb auch $a^2 \times a = a.a.a = a^3$. Ist bei einer allgemeinen Zahl kein Exponent angegeben, so ist dabei ebenfalls als solcher 1 anzunehmen.

5) Allgemeine Zahlen können ebenfalls nur addirt werden, wenn sie gleichartig sind. Gleichartig aber sind sie, wenn die Buchstabengrößen (Dignanden) und deren Exponenten gleich sind. Z. B. $2ab$ und $4ab$; $2a^2b$ und $3a^2b$ sind gleichartig. Gleichartige allgemeine Zahlen werden addirt, indem man ihre Koeffizienten addirt; also $2ab + 4ab = 6ab$; $2a^2b + a^2b = 3a^2b$. Bei ungleichartigen allgemeinen Zahlen kann die Addition nur angezeigt werden: a^2 und b^2 addirt gibt $a^2 + b^2$.

6) Sollen zwei- oder mehrtheilige Zahlen (die Summe von zwei oder mehr Zahlen) mit andern durch eine Rechnungsart verbunden werden, so schließt man jene in Klammern. Z. B. $2(a+b).c$ heißt: es werde die doppelte Summe von a und b mit c multiplizirt.

§. 88.

Aufgabe. Die Quadrirungsformeln zu entwickeln.

Auflösung. 1) Das Quadrat einer zweitheiligen Zahl ist (§. 87. 2.) ausgedrückt durch $(a+b)^2$. Es ist aber $(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b)$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a.a + a.b \\ + a.b + b.b \\ \hline a.a + 2a.b + b.b = a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Mit Worten: Das Quadrat einer zweitheiligen Zahl besteht aus dem Quadrate des ersten Theils, dem doppelten Produkte des ersten Theils in den zweiten und dem Quadrate des zweiten Theils.

2) Das Quadrat einer dreitheiligen Zahl wird angezeigt durch $(a+b+c)^2$. Setzt man vorher $a+b=p$, also $a+b+c=p+c$, so ist $(a+b+c)^2=(p+c)^2$

$$= p^2+2pc+c^2$$

Setzt man wieder statt p dessen Werth $a+b$, so ist

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$
$$= a^2+2ab+b^2$$
$$+ 2(a+b)c+c^2$$

Mit Worten: Bei Quadrirung einer dreitheiligen Zahl kommen zu den Gliedern, aus welchen das Quadrat der zuerst gesetzten zweitheiligen Zahl besteht, noch das doppelte Produkt aus der Summe der beiden ersten Theile in den dritten Theil und das Quadrat des dritten Theils.

Aehnliches gilt von Quadrirung vier- und mehrtheiliger Zahlen.

§. 89.

Aufgabe. Zwei und mehrzifferige Zahlen zu quadriren.

Auflösung. Man multiplizire sie mit sich selbst, oder theile sie nach der Dekadik in Summanden ab, und substituire diese in die Formeln von §. 88.

Beispiele. Man erhebe 76,128 zum Quadrate.

Berechnung.

Für $(76)^2 = (70+6)^2$ ist		Für $(128)^2 = (100+20+8)^2$	
$a = 70,\ b = 6$		ist $a=100,\ b=20,\ c=8$	
$a^2 = 70^2$	$= 4900$	$a^2 = 100^2$	$= 10000$
$2ab = 2.70.6$	$= 840$	$2ab = 2.100.20$	$= 4000$
$b^2 = 6^2$	$= 36$	$b^2 = 20^2$	$= 400$
$(76)^2$	$= 5776$	$2(a+b)c = 2.120.8$	$= 1920$
		$c^2 = 8^2$	$= 64$
		$(128)^2$	$= 16384$

Zusatz 1. Das Quadrat der kleinsten zweizifferigen Zahl, d. i. $10^2 = 100$ hat 3, das der größten Zahl, d. i. $99^2 = 9801$ hat 4 Ziffern; daher kann das Quadrat jeder andern zweizifferigen Zahl auch nur $3 = 2.2 - 1$ oder $4 = 2.2$ Ziffern haben. Das Quadrat der kleinsten dreizifferigen Zahl, d. i. $100^2 = 10000$ hat 5, das der größten dreizifferigen Zahl, d. i. $999^2 = 998001$ hat 6 Ziffern; daher kann das Quadrat jeder andern dreizifferigen

Zahl auch nur $5 = 3.2 - 1$ oder $6 = 3.2$ Ziffern haben. In gleicher Art hat das Quadrat einer n zifferigen Zahl entweder $2n - 1$ oder $2n$ Ziffern. Theilt man demnach ein Quadrat von der Rechten zur Linken in Klassen von je zwei Ziffern ab; so erhält man eben so viele Klassen, als dessen Wurzel Ziffern hat, wobei die erste Klasse zwei oder auch nur eine Ziffer haben kann.

Zusatz 2. Bei Quadrirungsbeispielen können die den einzelnen Gliedern anzuhängenden Nullen auch hinweggelassen werden, wenn man zur Bezeichnung des Lokalwerthes der bedeutsamen Ziffern jedes folgende Glied um eine Stelle weiter zur Rechten rückt. Obige beiden Beispiele stellen sich hiernach, wenn zugleich eine Eintheilung in Klassen von je zwei Ziffern vorgenommen wird, in folgender Art dar:

$$\begin{array}{rcr|l}
\multicolumn{4}{l}{(76)^2 = (70+6)^2} \\
a^2 & = & 49 & \\
2ab & = & 8 & 4 \\
b^2 & = & & 36 \\
\hline
 & & 57 & 76
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcr|r|l}
\multicolumn{5}{l}{(128)^2 = (100+20+8)^2} \\
a^2 & = & 1 & & \\
2ab & = & & 4 & \\
b^2 & = & & 4 & \\
2(a+b)c & = & & 19 & 2 \\
c^2 & = & & & 64 \\
\hline
 & & 1 & 63 & 84
\end{array}$$

Aus diesen und ähnlichen Beispielen ergibt sich: Die letzte Ziffer von $2ab$ reicht bis zur letzten Ziffer der ersten Klasse; die letzte Ziffer von $2ab$ bis zur ersten, von b^2 bis zur letzten Ziffer der zweiten Klasse; von $2(a+b)c$ bis zur ersten, von c^2 bis zur letzten Ziffer der dritten Klasse. Hat eine zu quadrirende Zahl mehr als 3 Ziffern, so reicht die letzte Ziffer von jedem doppelten Produkte der vorausgehenden Ziffern in die nächstfolgende bis zur ersten, das Quadrat der zuletzt genommenen Ziffern bis zur letzten Stelle jeder Klasse.

Beispiele. 1) Ein quadratförmiger Platz, von dem eine Seite 45′ beträgt, soll mit quadratförmigen Steinplatten, von denen eine Seite 9″ dc. groß ist, belegt werden. Wie viele Steinplatten braucht man?

Auflösung. Bezeichnet man eine Seite des Quadrates mit a, so ist dessen Inhalt $= a^2$. Daher Inhalt des Platzes $= 45^2 = 2025\,\square'$

Inhalt einer Steinplatte, deren eine Seite $= 9''$ dc. $= 0{,}9'$, ist $0{,}9^2 = 0{,}81\,\square''$

Anzahl der Steinplatten: $2025 : 0{,}81 = 202500 : 81 = 2500$.

2) Wie groß ist die Bodenfläche und der Inhalt eines Zylinders, dessen Durchmesser $= 2' \, 8''$ und dessen Höhe $= 3' \, 3''$ dd. ist?

Auflösung. Bezeichnet d den Durchmesser, h die Höhe und $\pi = 3{,}14$; so ist die Kreisfläche $= \frac{1}{4} d^2 \pi$, der Inhalt des Zylinders $=$ Kreisfläche $\times$ Höhe $= \frac{1}{4} d^2 \pi . h$.

$d = 2' \, 8'' = 2\frac{2}{3}$; $h = 3' \, 3'' = 3\frac{1}{4}' = 3{,}25'$

Kreisfläche $= \frac{1}{4} . (2\frac{2}{3})^2 . 3{,}14 = \frac{1}{4} . \frac{64}{9} . 3{,}14 = \frac{16}{9} . 3{,}14 = 5{,}58 \square' = 5 \square' \, 84 \square'' \, 74{,}88 \square'''$ dd.

Inhalt des Zylinders $= 5{,}58 . 3{,}25 = 18{,}135^{c'} = 18^{c'} \, 233^{c''}$.

Anmerkung. Dieses und später folgende Beispiele über Kreis-, Zylinder-, Kugel-Berechnung, zunächst für Schüler bestimmt, welche bereits einige Vorkenntnisse in der Geometrie besitzen (Schüler der Handwerks-Sonn- und Feiertagsschule), können beim ersten Unterrichte übergangen werden.

§. 90.

Aufgabe. Aus drei- und mehrzifferigen rationalen und aus irrationalen Quadratzahlen die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung. a) Für rationale Zahlen.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je zwei Ziffern, wobei auf die höchste Klasse auch nur eine Ziffer treffen kann.

2) Man suche aus §. 86. 1. das der ersten Klasse gleiche oder nächst niedrige Quadrat, schreibe die Wurzel in Form eines Quotienten seitwärts, und ziehe ihr Quadrat von der ersten Klasse ab.

3) Zum etwaigen Reste schreibe man die nächste Klasse, setze darunter das Doppelte der gefundenen ersten Ziffer der Wurzel als Divisor so, daß die Stelle unter der niedrigsten herabgesetzten Klasse leer bleibt, und dividire damit in die darüberstehende Zahl.

4) Den Quotienten schreibe man als die zweite Ziffer der Wurzel an und zugleich in die leer gelassene Stelle des Divisors, multiplizire damit den vermehrten Divisor, und ziehe das Produkt vom Dividend ab.

5) Bleibt kein Rest und ist keine Klasse mehr vorhanden, so ist die Rechnung vollendet. Bleibt aber ein Rest, und sind noch

nicht in Rechnung gebrachte Klassen der gegebenen Zahl vorhanden, so setze man

6) zum Reste eine neue Klasse, bestimme den neuen Divisor, indem man die bisher gefundenen Ziffern der Wurzel mit 2 multiplizirt, und wiederhole für diese, so wie für jede folgende Klasse das in Nro. 3. und 4. angegebene Verfahren. Der Beweis ergibt sich aus §. 88.

Beispiele. 1) $\sqrt{46|24}$ $a + b = 6\ 8$

$$\begin{aligned} a^2 &= 36 \\ & \overline{1024} \\ 2a + b &= (128) \\ 2ab + b^2 &= 1024 \\ & \overline{\quad 0 \quad} \end{aligned}$$

2) $\sqrt{6|28|00|36}$ $a + b + c + d = 2\ 5\ 0\ 6$

$$\begin{aligned} a^2 &= 4 \\ & \overline{228} \\ 2a + b &= (45) \\ 2ab + b^2 &= 225 \\ & \overline{300} \\ 2(a + b) &= (50) \\ & \overline{30036} \\ 2(a + b + c) + d &= (5006) \\ 2(a + b + c)d + d^2 &= 30036 \\ & \overline{\quad 0 \quad} \end{aligned}$$

b) Für irrationale Zahlen.

Ist die gegebene Zahl ein- oder zweizifferig und nicht in der Quadrattafel §. 86. 1. enthalten, oder bleibt nach dem Abziehen des nächst niedrigen (aus einer oder mehreren Klassen bestehenden) Quadrates ein Rest; so ist die Wurzel irrational, d. h. sie kann nur annähernd durch Dezimalen bestimmt werden. Dieß geschieht, indem man dem jedesmaligen Reste 2 Nullen anhängt, nach obigen Regeln verfährt, und von der Wurzel so viele Dezimalstellen abschneidet, als man Klassen von Nullen anhängt.

Beispiel und Beweis.

$$\sqrt{3} = \sqrt{3 \times \frac{1000000}{1000000}} \times \sqrt{\frac{3000000}{1000000}} \quad (\text{§. 86. 2.})$$

$$= \frac{1732}{1000} = 1{,}732 \ldots$$

Eben so $\sqrt{280} = \sqrt{2|80,|00|00|00|} = 16{,}733 \ldots$

§. 91.

Aufgabe. Aus Brüchen die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung. 1) Sind Zähler und Nenner rational, so ziehe man sie aus denselben einzeln aus.

Z. B. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

2) Ist der Bruch ein Dezimalbruch, mit oder ohne Ganze, so zieht man auf die in §. 90. angegebene Art die Wurzel aus, nur muß man vor der Klasseneintheilung die Dezimalstellen, wenn sie nicht paarweise gegeben sind, durch Anhängung einer Nulle dazu ergänzen. In der Wurzel schneidet man für jede gegebene Klasse von Dezimalen eine Ziffer als Dezimale ab.

Z. B. $\sqrt{17{,}850625} = \sqrt{\frac{17850625}{1000000}} = \frac{4225}{1000} = 4{,}225$

$\sqrt{0{,}875} = \sqrt{0{,}|87|50|00|00} = 0{,}9354\ldots$

3) Ist der Bruch ein gemeiner Bruch, und sind Zähler und Nenner irrational, so verwandelt man ihn in einen Dezimalbruch, und zieht aus diesem nach Obigem die Wurzel aus.

Beispiele.

1) $\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{0{,}875} = 0{,}9354143\ldots$

2) $\sqrt{7\frac{2}{3}} = \sqrt{7{,}666666\ldots} = 2{,}7688746.$

§. 92.

Aufgaben über die Anwendung des Quadratwurzelausziehens.

1) Es soll ein quadratförmiger Platz, welcher 21904 □' groß ist, mit Steinplatten, von welchen jede die Größe und Gestalt eines Quadratfußes hat, belegt werden. Wie viel kommen in eine Reihe zu liegen?

Antwort: $\sqrt{21904} = 148$.

2) Eine Baumschule ist in Form eines Quadrates angelegt, d. i. mit Baumchen so besetzt, daß von diesen eben so viele in einer Reihe stehen, als Reihen hintereinander sich befinden. Wenn es nun im Ganzen 339889 Baumchen sind, wie viel stehen in einer Reihe?

Antwort: $\sqrt{339889} = 583$.

3) Aus 16 □' 96 □'' dd. Blech soll ein hohler Würfel gefertigt werden; wie groß muß eine Seite seyn?

Auflösung. Ganze Oberfläche $= 16\square' \; 96\square'' = 2400\square''$; eine der 6 Seitenflächen $= \frac{2400}{6} = 400\square'$.
Größe einer Seite $= \sqrt{400} = 20'' = 1'\,8''$.

4) Wie groß ist der Durchmesser einer Mühlwelle, welche einen Kubikinhalt von $62^{c'}\; 800^{c''}$ dc. und eine Länge von $20'$ hat?

Auflösung. Aus dem Inhalte z eines Zylinders, der Höhe (Länge) h desselben und $\pi = 3{,}14$ wird der Durchmesser d gefunden nach der Formel $d = \sqrt{\frac{4.z}{h.\pi}}$.

Nun ist $z = 62^{c'}\; 800^{c''} = 62{,}8^{c'}$, $h = 20'$, also

$$d = \sqrt{\frac{4.62{,}8}{20.3{,}14}} = \sqrt{\frac{4.62{,}8}{62{,}8}} = \sqrt{4} = 2'.$$

5) Wie groß ist der Durchmesser einer kugelförmigen kupfernen Blase, zu welcher $6\square'\; 84\square''$ dd. Blech verwendet wurden?

Auflösung. Aus der Oberfläche $S = d^2.\pi$ einer Kugel findet man den Durchmesser nach der Formel $d = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

Es ist $S = 6\square'\; 84\square''$ dd. $= 948\square''$

$$d = \sqrt{\frac{948}{3{,}14}} = \sqrt{301{,}9108} = 17{,}37'' = 1'\; 5''\; 4'''.$$

C. Kubus und Kubikwurzel.

§. 93.

Aufgabe. Die Kubirungsformeln zu entwickeln.

Auflösung. 1) $(a+b)^3$ drückt den Kubus einer zweitheiligen Größe aus; man entwickelt es, indem man $a+b$ dreimal als Faktor setzt, oder zuerst zum Quadrate erhebt und dieses noch einmal mit $a+b$ multiplizirt. Es ist $(a+b)^3 = (a+b) \times (a+b)\,(a+b) = (a+b)^2\,(a+b)$

$$\begin{array}{rl} (a+b)^2 = & a^2 + 2ab + b^2 \\ & a + b \\ \hline & a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ & \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline (a+b)^3 = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Mit Worten: Der Kubus einer zweitheiligen Größe besteht aus dem Kubus des ersten Theils, dem dreifachen Produkte von dem Quadrate des ersten Thrils in den zweiten, dem dreifachen

Produkte von dem ersten Theile in das Quadrat des zweiten, und aus dem Kubus des zweiten Theils.

2) In $(a+b+c)^3$ setze man $a+b=p$, so ist

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 = (p+c)^3 &= p^3 + 3p^2c + 3pc^2 + c^3 \\ &= (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &\quad + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3.\end{aligned}$$

§. 94.

Aufgabe. Eine mehrzifferige Zahl zum Kubus zu erheben.

Auflösung. Man theile sie nach der Dekadik in Summanden ab, und substituire sie in die Formeln von §. 93. Dabei kann man, wie bei dem Erheben einer Zahl zum Quadrate, die am Ende anzuhängenden Nullen hinweglassen, wenn man jedes folgende Glied um eine Zifferstelle weiter zur Rechten rückt.

Z. B. $(345)^3 = (300 + 40 + 5)^3$

$a = 300,\ b = 40,\ c = 5$

a^3	$= 3^3 =$	27		
$3a^2b$	$= 3.3^2.4 =$	10	8	
$3ab^2$	$= 3.3.4^2 =$	1	44	
b^3	$= 4^3 =$		64	
$3(a+b)^2c$	$= 3.34^2.5 =$	1	734	0
$3(a+b)c^2$	$= 3.34.5^2 =$		25	50
c^3	$= 5^3 =$			125
	$(345)^2 =$	41	063	625

Zusatz 1. Da durch ein Verfahren, welches dem in §. 89. Zusatz 1. angegebenen entsprechend ist, gezeigt werden kann, daß der Kubus einer n zifferigen Zahl nicht weniger als $3n-2$ und nicht mehr als $3n$ Ziffern haben könne, so ergibt sich der Satz: Wenn man den Kubus einer Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je 3 Ziffern abtheilt, so erhält man eben so viele Klassen, als die Wurzel Ziffern hat, wobei die erste Klasse zur Linken 1, 2 oder 3 Ziffern erhalten kann.

Zusatz 2. Aus obigem und jedem andern ähnlichen Beispiele ersieht man: die letzte Ziffer von a^3 reicht bis zur letzten Ziffer der ersten Klasse; jedes dreifache Produkt aus dem Quadrate des vorausgehenden Theils in den nachfolgenden bis zur ersten, jedes dreifache Produkt aus dem ganzen vorausgehenden

Theil in das Quadrat des nachfolgenden bis zur zweiten, jeder Kubus des nachfolgenden Theils bis zur dritten Stelle der entsprechenden nachfolgenden Klasse.

Beispiele. 1) Von einem gußeisernen Würfel ist eine Seite $= 1' \, 3''$ dd. Wie groß ist der Inhalt desselben? Wie groß dessen Gewicht, da das spezifische Gewicht des Gußeisens $= 7{,}25$, d. h. das Gußeisen 7,25 mal so schwer ist, als das Wasser und 1 c′ Wasser 44,17 ℔ wiegt? Welches ist der Werth desselben, wenn 1 ℔ Gußeisen 6 kr. kostet?

Berechnung. $1' \, 3''$ dd. $= 1\frac{1}{4}' = 1{,}25'$

Inhalt $= 1{,}25^3 = 1{,}953125$ c′ $= 1$ c′ 1646,784 c″ dd.

Gewicht von 1 c′ Eisen $= 44{,}17 \times 7{,}25 = 320{,}2325$ ℔.

Gewicht d. Würfels (annähernd) $= 320{,}23 \times 1{,}953 = 625{,}4$ ℔.

Werth $= 625{,}4 \times 6$ kr. $= 625{,}4 \times 0{,}1$ fl. $= 62$ fl. 32,4 kr.

2) Wie groß ist der Inhalt einer Kugel, deren Durchmesser $= 6''$ dc. ist? Der Inhalt einer Kugel wird durch die Formel $\frac{1}{6}d^3\pi$, d. i. dadurch bestimmt, daß man den sechsten Theil des Kubus des Durchmessers mit $\pi = 3{,}14$ multiplizirt.

Berechnung. Kugel $= \frac{1}{6}d^3\pi = \frac{1}{6}.6^3.3{,}14 = \frac{1}{6}.216.3{,}14 = 36.3{,}14 = 113{,}04$ c″ $= 113$ c″ 40 c‴.

§. 95.

Aufgabe. Aus vier- und mehrzifferigen rationalen und aus irrationalen Kubikzahlen die Kubikwurzel zu ziehen.

Auflösung. a) Für rationale Zahlen.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je drei Ziffern.

2) Man suche aus der Tafel des §. 86. 1. den der ersten Klasse gleichen oder nächst niedrigen Kubus, schreibe die Wurzel davon in Form eines Quotienten seitwärts, und ziehe jenen Kubus von der ersten Klasse ab.

3) Zum etwa bleibenden Reste schreibe man die zweite Klasse, setze darunter das dreifache Quadrat des gefundenen ersten Theils der Wurzel (das $3a^2$) als Divisor so, daß dessen niedrigste Ziffer unter die höchste der herabgesetzten Klasse zu stehen kommt, und dividire damit in die darüberstehende Zahl. Der Quotient ist die zweite Ziffer der Wurzel (b).

4) Nun bestimme man drei Produkte, nämlich a) das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten ($3a^2b$), b) das Produkt aus

dem dreifachen ersten Theile in das Quadrat des zweiten ($3ab^2$), c) den Kubus des zweiten Theils (b^3); schreibe diese Produkte so untereinander, daß das erste unter den Divisor zu stehen kommt, jedes folgende um eine Stelle weiter zur Rechten gerückt ist; addire sie und ziehe ihre Summe von dem darüberstehenden Theile der Kubikzahl ab.

5) Bleibt kein Rest und ist keine Klasse mehr vorhanden, so ist die Rechnung vollendet. Bleibt aber ein Rest, und sind noch nicht in Rechnung gebrachte Klassen der gegebenen Zahl vorhanden, so setze man

6) zum Reste eine neue Klasse, bestimme den neuen Divisor, indem man die bisher gefundenen Ziffern der Wurzeln zum Quadrate erhebt und mit 3 multiplizirt, und wiederhole für diese, so wie für jede folgende Klasse das angegebene Verfahren.

Der Beweis ergibt sich aus §. 94.

Beispiele. I. $\sqrt[4]{39304}$. II. $\sqrt{91185763501}$.

Berechnung. I. $\sqrt[4]{39|304}$ | $\begin{matrix} a + b \\ 3 \quad 4 \end{matrix}$

$$a^3 = 27$$
$$12304$$
$$3a^2 = (27)$$
$$3a^2b = 108$$
$$3ab^2 = 144$$
$$b^3 = 64$$
$$12304$$
$$\emptyset$$

II. $\sqrt[4]{91|185|763|501}$ | $\begin{matrix} a + b + c + d \\ 4 \quad 5 \quad 0 \quad 1 \end{matrix}$

$$a^3 = 64$$
$$27185$$
$$3a^2 = (48)$$
$$3a^2b = 240$$
$$3ab^2 = 300$$
$$b^3 = 125$$
$$27125$$
$$60763$$
$$3(a+b)^2 = (6075)$$
$$60763501$$
$$3(a+b+c)^2 = (607500)$$
$$3(a+b+c)^2d = 607500$$
$$3(a+b+c)d^2 = 1350$$
$$d^3 = 1$$
$$60763501$$
$$\emptyset$$

b) Für irrationale Zahlen.

Ist die gegebene Zahl ein-, zwei- oder dreizifferig und nicht in der Kubiktafel §. 86. enthalten, oder bleibt nach dem Abziehen des nächst niedrigen (aus einer oder mehreren Ziffern bestehenden) Kubus ein Rest: so kann die Wurzel nur annähernd bestimmt werden. Man bestimmt aber zum Behufe der Annäherung noch einige Dezimalen, wenn man dem jedesmaligen Reste eine Klasse von 3 Nullen anhängt, das obige Verfahren wiederholt, und in der Wurzel so viele Dezimalen abschneidet, als man Klassen von Nullen anhängt.

Beispiel mit Beweis.

$$\sqrt[3]{586} = \sqrt[3]{586 \times \frac{1000000000}{1000000000}} = \sqrt[3]{\frac{586000000000}{1000000000}} = \frac{8368}{1000} = 8{,}368\ldots$$

§. 96.

Aufgabe. Aus Brüchen die Kubikwurzel zu ziehen.

Die Auflösung ist der in §. 91. für Ausziehung der Quadratwurzel angegebenen analog; nur mit dem Unterschiede, daß bei dem Ausziehen der Kubikwurzel aus Dezimalen jede Klasse drei Ziffern enthalten, und hiernach die etwa nothwendige Ergänzung durch am Ende anzuhängende Nullen gemacht werden muß.

Beispiele. I. $\sqrt[3]{\frac{8}{15625}} = \frac{2}{25}$.

II. $\sqrt[3]{0{,}000|074|088|} = 0{,}042$.

III. $\sqrt[3]{28{,}6} = \sqrt[3]{28{,}|600|000|000|000|} = 3{,}0581$.

§. 97.

Aufgaben über die Anwendung des Kubikwurzelausziehens.

1) Es soll eine würfelförmige Kiste gefertigt, welche so viel faßt, als drei andere ähnliche Kisten zusammen. Es ist aber die eine 1′ 2″, die zweite 2′, die dritte 2′ 6″ dd. hoch. Wie groß muß der Kubikinhalt, wie groß eine Seite der anzufertigenden Kiste werden?

Lösung. Kubikinhalt $= (14'')^3 + (24'')^3 + (30'')^3 = 2744\ c'' + 13824\ c'' + 27000\ c'' = 43568\ c'' = 25\ c'\ 368\ c''$.

Größe einer Seite $= \sqrt[3]{43568} = 35{,}18''\ldots = 2'\ 11''\ 2'''$.

2) Es

2) Es soll eine Grube gegraben werden, welche gleiche Länge, Breite und Tiefe haben und 1000 bayerische Eimer fassen soll. Wie groß muß jede jener Seiten werden?

Auflösung. Eine Maß hält 43 c'' dc., also

$$1000 \text{ Eimer} = 43.60.1000 = 2580000\ c''.$$

$$\sqrt{2580000} = 137{,}1'' = 1^{\circ}\ 3'\ 7''\ 1'''.$$

3) Wie groß ist der Durchmesser einer 24pfündigen Kanonenkugel, 1 c' Eisen zu 320 ℔ gerechnet.

Auflösung. Der Durchmesser d einer Kugel wird aus deren Inhalt K gefunden nach der Formel:

$$d = \sqrt[3]{\frac{6K}{\pi}}$$

24 ℔ Eisen geben $\frac{24}{320}\ c' = \frac{3}{40}\ c' = \frac{3}{40} \cdot 1728\ c'' = 129{,}6\ c''$

$$d = \sqrt[3]{\frac{6.129{,}6}{3{,}14}} = \sqrt[3]{\frac{777{,}6}{3{,}14}} = \sqrt[3]{247{,}644} = 6{,}289''$$

$= 6''\ 3{,}468'''$ dd.

III. Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Vorbegriffe.

§. 98.

Verhältniß ist die Vergleichung zweier Zahlen, in soferne dadurch entweder bestimmt wird, um wie viele Einheiten, oder um wie vielmal die eine größer oder kleiner ist, als die andere. Die erste Vergleichungsart heißt ein arithmetisches, die zweite ein geometrisches Verhältniß. Die in einem mathematischen Verhältnisse verglichenen zwei Größen müssen also durch gleichartige Zahlen bestimmt seyn; diese zwei Zahlen heißen Glieder, und zwar die zuerst gesetzte Vorderglied, die zweite Hinterglied. Ist jenes größer als dieses, so heißt das Verhältniß ein fallendes, ist aber das Hinterglied größer als das Vorderglied, so heißt das Verhältniß ein steigendes.

§. 99.

1. Die Zahl, welche im arithmetischen Verhältnisse angibt, um wie viele Einheiten das Hinterglied größer oder kleiner ist, als das Vorderglied, heißt Differenz. Sie wird gefunden, wenn man vom Hintergliede das Vorderglied subtrahirt; deßhalb wird ein arithmetisches Verhältniß auch durch das zwischen die beiden Glieder gesetzte Subtraktionszeichen bezeichnet. Z. B. in dem Verhältnisse $3-7$ (3 zu 7) ist die Differenz 4.

2. Das Hinterglied (7) kann man dadurch entstanden annehmen, daß zum Vordergliede (3) die Differenz (4) addirt ist, oder $7 = 3 + 4$.

3. Haben zwei arithmetische Verhältnisse gleiche Differenzen, so sind sie gleich. So ist z. B. das Verhältniß $3-7$ dem Verhältnisse $8-12$ gleich, weil beide die Differenz 4 haben.

4. Ein arithmetisches Verhältniß bleibt unverändert, wenn man die nämliche Zahl zu beiden Gliedern addirt, oder davon subtrahirt. Vergl. §. 13. 5°.

Anmerk. Hier, so wie in §. 102., sind, um negative Differenzen zu vermeiden, zunächst steigende Verhältnisse vorausgesetzt.

§. 100.

1. Die Zahl, welche im geometrischen Verhältnisse angibt, um wie vielmal das Hinterglied größer oder kleiner ist, als das Vorderglied, oder wie oft dieses in jenem enthalten ist, heißt Exponent. Den Exponenten des geometrischen und die Differenz des arithmetischen Verhältnisses nennt man auch Verhältnißzeiger. Der Exponent wird gefunden, wenn das Hinterglied durch das Vorderglied dividirt wird; derselbe ist bei einem steigenden Verhältnisse >1, bei einem fallenden <1. Das geometrische Verhältniß kann daher als Quotient betrachtet werden, und wird durch das zwischen die beiden Glieder gesetzte Divisionszeichen bezeichnet. Z. B. in dem Verhältnisse $5:15$ ist der Exponent 3; in $15:5$ ist er $\frac{1}{3}$.

2. Das Hinterglied kann als Produkt aus dem Vordergliede in den Exponenten betrachtet werden: $15 = 5 \times 3$, $5 = 15 \times \frac{1}{3}$.

3. Sind die Exponenten zwei oder mehrerer geometrischer Verhältnisse gleich, so sind diese selbst gleich. Z. B. $7:21 = 3:9$.

4. Es können daher auch die beiden Glieder durch die nämliche Zahl dividirt (verkleinert) oder multiplizirt werden, ohne daß der Werth des Verhältnisses geändert wird. (Vergl. §. 30. III.) Z. B. $9 : 18 = 1 : 2 = 27 : 54$. Die Multiplikation wendet man an, um Verhältnisse von Brüchen auf Verhältnisse ganzer Zahlen zu bringen, indem man mit dem (gemeinschaftlichen) Nenner jedes Glied multiplizirt. Z. B.

$$\frac{3}{4} : 7 = 3 : 28$$

$$\frac{1}{3} : \frac{4}{5} = 1 : \frac{12}{5} = 5 : 12$$

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = 6 : 7$$

$$3\frac{1}{2} : 14 = 7 : 28 = 1 : 4.$$

§. 101.

I. Zwei gleiche Verhältnisse mittelst des Gleichheitszeichens zusammengestellt geben eine Proportion, und zwar

1) eine arithmetische, wenn die Verhältnisse arithmetisch sind, z. B. $2 - 5 = 6 - 9$.

2) eine geometrische, wenn die Verhältnisse geometrisch sind, z. B. $2 : 6 = 4 : 12$.

II. Man nennt

a) das erste und letzte Glied einer Proportion die äußeren Glieder, das zweite und dritte die mittleren Glieder,

b) das erste und dritte Glied Vorderglieder, das zweite und vierte Hinterglieder,

c) die beiden Vorder- oder die beiden Hinterglieder homologe oder gleichnamige Glieder.

III. Wenn in einer Proportion die mittleren Glieder einander gleich sind, so heißt sie stätig oder fließend; außerdem diskret. Bei dem Anschreiben einer stätigen Proportion läßt man das eine der beiden mittleren Glieder und das Gleichheitszeichen gewöhnlich hinweg. Z. B.

$2-5=5-8$ oder $2-5-8$ stätige arithmetische,

$2:4=4:8$ oder $2:4:8$ stätige geometrische Proportion.

I. Artikel.

Von den arithmetischen Proportionen.

I. Hauptstück.

Mit unbenannten Zahlen.

§. 102.

In jeder diskreten arithmetischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder gleich der Summe der mittleren. Da nämlich (§. 99. 2°.) das zweite Hinterglied die Summe des dritten Gliedes und der Differenz ist, so enthält die Summe der äußeren Glieder a) das erste, b) das dritte Glied und c) die Differenz. Eben so ist das zweite Glied als Hinterglied des ersten Verhältnisses gleich dem ersten Gliede sammt der nämlichen Differenz. Die Summe der mittleren Glieder enthält daher die nämlichen Summanden, welche in der Summe der äußeren Glieder sich finden, und ist daher der Summe der letzteren gleich. Z. B. in $3-8=4-9$ oder $3-(3+5)=4-(4+5)$ ist $3+(4+5)=(3+5)+4=12$.

Hieraus ergeben sich nachstehende zwei Sätze:

1) Wenn man die nämliche Zahl zu einem äußeren und mittleren Gliede einer arithmetischen Proportion addirt, oder davon subtrahirt, so wird diese dadurch nicht gestört.

$$3-8=9-14 \qquad 12-10=19-17$$
$$+2 \quad +2 \qquad -3 \quad -3$$
$$3-10=9-16 \qquad 9-10=16-17$$
Diff. $7=7$ $\qquad$ $1=1.$

2) Man findet zu drei gegebenen Zahlen eine vierte arithmetische Proportionalzahl so, daß man, wenn diese ein äußeres Glied ist, von der Summe der mittleren Glieder das gegebene äußere Glied subtrahirt; wenn die gesuchte Zahl ein mittleres Glied ist, daß man von der Summe der äußeren Glieder das gegebene mittlere Glied subtrahirt.

Beispiele.

I. $6-10=5-x$

$6+x=10+5$, also $x=15-6=9$.

II. $7-x=15+18$

$x+15=7+18$, also $x=25-15=10$.

§. 103.

I. In jeder stätigen arithmetischen Proportion sind die beiden mittleren Glieder einander gleich; deren Summe ist also das Doppelte des einen mittleren Gliedes. Daher ändert sich bei solchen Proportionen der im vorhergehenden Paragraph ausgesprochene Satz so ab: die Summe der äußeren Glieder ist gleich dem doppelten mittleren Gliede. Z. B.

$6-12-18$, hier ist $6+18=2.12=24$.

II. Man findet demnach zu zwei Gliedern ein äußeres, wenn man von dem doppelten mittleren Gliede das gegebene äußere Glied abzieht, und zwischen zwei äußeren Gliedern das mittlere oder das sogenannte arithmetische Mittel, wenn man die Summe der gegebenen Glieder durch 2 dividirt.

Beispiele.

I. $7-18-x$

$7+x=2.18$, also $x=36-7=29$.

II. $18-x-29$

$2x=18+29$, also $x=\frac{47}{2}=23\frac{1}{2}$.

II. Hauptstück.

Anwendung der arithmetischen Proportionen auf benannte Zahlen.

§. 104.

Die arithmetische Proportion wird nur selten auf Erfahrungs-Gegenstände angewendet. Sie kann darauf angewendet werden, 1) wenn dieselben immer um gleiche Differenzen zu- oder abnehmen, und 2) bei Auffindung des Durchschnittswerthes zweier (oder mehrerer) Gegenstände.

Bei den ersteren Aufgaben, welche durch diskrete Proportionen berechnet werden, wird der Ansatz so gemacht, daß die zu dem nämlichen Objekte gehörigen benannten Zahlen in ein Verhältniß zusammen, die unmittelbar miteinander verglichenen (in einem Satze stehenden) Zahlen der beiden Objekte als homologe Glieder gesetzt werden, vorausgesetzt, daß mit der Zu- oder Abnahme des einen Objektes auch die Zu- oder Abnahme des anderen verbunden ist, (was in der Regel der Fall seyn wird). Wäre mit der Zunahme des einen die Abnahme des anderen verbunden, so müßten die zusammengehörigen Zahlen der beiden Objekte äußere und mittlere Glieder werden.

Beispiele.

I. Konstantin der Große wurde im Jahre 306 (der gemeinen christlichen Zeitrechnung) zum Kaiser ausgerufen; das wievielte Jahr nach Roms Erbauung war dieses?

Auflösung.

Chr. Ztr. Chr. Ztr. Erb. R. Erb. R.

$$1 - 306 = 754 - x.$$

$x = 1060 - 1 = 1059$ der Erbauung Roms.

II. Vorausgesetzt, daß, wenn es in Regensburg 10 Uhr 3 Minuten ist, London 9 Uhr 27 Minuten habe; wie viel ist es in London, wenn Regensburg halb 3 Uhr Nachmittags hat?

Auflösung.

R. R. L. L.

$$10^h 3' - 14^h 30' = 9^h 17' - x.$$

$$x = (23^h 47') - 10^h 3' = 13^h 44'.$$

Also war es in London 44 Minuten über 1 Uhr Nachmittags.

III. Als Cajus Hochzeit hielt, war er 25 Jahre 7 Monate 15 Tage, seine Braut aber 24 Jahre 2 Monate alt. Wie viele

Jahre zählte Kajus an ihrem Sterbetage, da sie in einem Alter von 50 Jahren 5 Monaten 19 Tagen starb?

x = 51 J. 11 M. 4 T.

IV. Zwei gleich dicke Wachskerzen, von denen die eine 14″ 9‴, die andere 12″ 5‴ lang war, wurden zu gleicher Zeit angezündet; wie lange wird die zweite noch seyn, wenn die erste auf 9″ 3‴ herabgebrannt ist?

x = 6″ 11‴.

V. In welchem Jahre der Olympiaden und nach Erschaffung der Welt leben wir? Es fällt aber das erste Jahr nach gemeiner christlicher Zeitrechnung mit dem Jahre 777 der Olympiaden oder mit dem 1sten Jahre der 195sten Olympiade und (nach Usser) mit dem Jahre 4005 nach Erschaffung der Welt zusammen.

§. 105.

Der Durchschnittswerth zweier Dinge wird nach der stätigen Proportion (§. 103. II.), folglich so gefunden, daß man ihre Summe durch 2 dividirt. Auf analoge Art findet man ihn für mehrere Dinge, wenn man ihre einzelnen Werthe addirt, und die Summe durch die Zahl der Dinge dividirt.

Beispiele.

I. Auf einem Wochenmarkte war der höchste Preis des Roggens 13 fl. 24 kr., der niedrigste 12 fl. 30 kr. Welches war der Mittelpreis?

Auflösung.

13 fl. 24 kr. — x — 12 fl. 30 kr.

x = (13 fl. 24 kr. + 12 fl. 30 kr.) : 2 = (25 fl. 54 kr.) : 2 = 12 fl. 57 kr.

II. Ein Gut warf in 5 aufeinander folgenden Jahren nachstehende Renten ab: 1420 fl. 12 kr., 1380 fl., 1390 fl. 42 kr., 1402 fl. 18 kr., 1480 fl. 48 kr. Welches ist der mittlere Ertrag desselben?

Auflösung.

1420 fl.	12 kr.	
1380 „	— „	
1390 „	42 „	Mittlerer Ertrag
1402 „	18 „	$\frac{7074}{5}$ fl. = 1414 fl. 48 kr.
1480 „	48 „	
7074 fl.	— kr.	

III. Ein Wirth mischt 1 Eimer Wein, die Maß zu 1 fl., mit 30 Maß eines andern Weins, die Maß zu 48 kr., und mit

10 Maß Wasser. Wie viel wird eine Maß des so gemischten Weines werth seyn?

Auflösung.

Maß		kr.		kr.
60	×	60	=	3600
30	×	48	=	1440
10	×	0	=	0
100 Maß				5040 kr.

Antw. $\frac{5040}{100}$ kr. = $50\frac{2}{5}$ kr.

II. Artikel.

Von den geometrischen Proportionen.

I. Hauptstück.

Mit unbenannten Zahlen.

§. 106.

In jeder diskreten geometrischen Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der mittleren Glieder. Da nämlich das vierte Glied als Hinterglied des zweiten Verhältnisses (§. 100. 2.) das Produkt aus dem dritten Gliede in den Exponenten ist, so enthält das Produkt der äußeren Glieder als Faktoren: das erste Glied, das dritte Glied und den Exponenten. Eben diese Faktoren enthält auch das Produkt der mittleren Glieder, daher ist es dem Produkte der äußeren Glieder gleich. Z. B. in der Proportion $4 : 12 = 2 : 6$ ist $4 \times 6 = 12 \times 2$ oder $4 \times (2 . 3) = (4 . 3) \times 2 = 24$.

Zusatz 1. Nach diesem Satze findet man zu 3 Zahlen eine vierte Proportionalzahl in der Art, daß man, wenn die gesuchte Zahl ein äußeres Glied ist, das Produkt der mittleren Glieder durch das gegebene äußere Glied dividirt; ist sie ein mittleres Glied, daß man das Produkt der äußeren Glieder durch das gegebene mittlere dividirt.

Z. B. aus $3 : 12 = 7 : x$ ist $3 . x = 12 . 7$, folglich das einfache $x = \frac{12 . 7}{3} = 28$. Setzt man 28 an die Stelle von x,

so ist das Verhältniß 3 : 12 wirklich = 7 : 28, indem beide Verhältnisse den Exponenten 4 haben.

Aus $7 : x = 15 : 3$ ist $15 . x = 21$, und $x = \frac{21}{15} = 1\frac{2}{5}$.

Zusatz 2. Ist das Produkt zweier Zahlen dem Produkte zweier andern gleich, so kann aus den vier Zahlen eine Proportion in der Art gebildet werden, daß die Faktoren des einen Produktes zu äußeren, die des andern zu mittleren Gliedern gemacht werden.

Aus $6 . 4 = 3 . 8$ ergibt sich
$6 : 3 = 8 : 4$.

§. 107.

Bei stätigen geometrischen Proportionen ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Quadrate des mittleren Gliedes. Da nämlich bei stätigen Proportionen die beiden mittleren Glieder einander gleich sind, so geht deren Produkt, welches bei jeder geometrischen Proportion dem Produkte der äußeren Glieder gleich ist, in das Quadrat eines mittleren Gliedes über.

Z. B. in der Proportion: $4 : 6 : 9$ oder $4 : 6 = 6 : 9$
ist $4 \times 9 = 6 \times 6 = 6^2 = 36$.

Zusatz 1. Man findet daher zu zwei gegebenen Zahlen die dritte Proportionalzahl, wenn man, nach Bildung einer stätigen geometrischen Proportion, deren letztes Glied = x ist, das Quadrat des mittleren Gliedes durch das gegebene äußere Glied dividirt, und zwischen zwei Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl, wenn man aus dem Produkte derselben die Quadratwurzel zieht. Z. B.

$$3 : 9 : x;\ x = \frac{9^2}{3} = \frac{81}{3} = 27$$

$$4 : x : 16;\ x^2 = 4 . 16 \text{ und } x = \sqrt{64} = 8.$$

Zusatz 2. Ist das Produkt zweier Zahlen dem Quadrate einer dritten Zahl gleich, so ist letztere die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen den beiden ersteren.

Z. B. Aus $2 . 18 = 36 = 6^2$ erhält man
$2 : 6 : 18$.

§. 108.

In jeder Proportion lassen sich die mittleren und äußeren Glieder verwechseln, und die Verhältnisse umkehren, d. i. die

Hinterglieder zu Vordergliedern und diese zu Hintergliedern machen, ohne daß die Proportion aufhört, Proportion zu seyn, indem auch nach solchen Versetzungen das Produkt der äußeren Glieder gleich ist dem Produkte der mittleren Glieder. Hiernach kann eine Proportion in achterlei Formen dargestellt werden. Z. B.

$3 : 15 = 2 : 10$
$3 : 2 = 15 : 10$
$10 : 15 = 2 : 3$
$10 : 2 = 15 : 3$
$15 : 3 = 10 : 2$
$15 : 10 = 3 : 2$
$2 : 3 = 10 : 15$
$2 : 10 = 3 : 15$

Immer ist $3 . 10 = 15 . 2 = 30$, und jede 2 zusammengehörige Verhältnisse haben einerlei Exponenten.

§. 109.

Es können nicht nur (§. 100. 2.) die beiden Glieder eines Verhältnisses, sondern auch, zu Folge der möglichen Versetzungen, ein Paar homologe Glieder durch die nämliche Zahl dividirt und multiplizirt werden.

Zusatz 1. Man kann daher immer ein äußeres und mittleres Glied verkleinern. Z. B.

$36 : 48 = 5 : x$
$3 : 4 = 5 : x = \frac{20}{3}$

$5 : 9 = 15 : x$
$1 : 9 = 3 : x = 27$, weil
$5 : 15 = 9 : x$
$1 : 3 = 9 : x = 27.$

Zusatz 2. Es können Brüche aus einer Proportion hinweggeschafft werden, wenn ein äußeres und mittleres Glied (worunter immer auch das Glied, in welchem der Bruch steht, mitbegriffen seyn muß) mit dem Nenner des Bruches multiplizirt werden. Sind jene beiden Glieder Brüche, so werden sie mit dem gemeinschaftlichen Nenner multiplizirt. Z. B.

$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = 8 : x$
$21 : 4 = 40 : x = \frac{160}{21}$

$\frac{5}{12} : 15 = 5\frac{1}{6} : x$
$5 : 15 = 31 . 2 : x$
$1 : 3 = 31 . 2 : x = 186.$

§. 110.

Zwei Proportionen können zu einer einzigen dadurch vereinigt werden, daß die einzelnen Glieder der Ordnung nach miteinander multiplizirt werden. Z. B.

$$\begin{array}{r} 3 : 6 = 5 : 10 \\ 1 : 3 = 4 : 12 \\ \hline 3 : 18 = 20 : 120. \end{array}$$

Beweis. In jedem dieser Verhältnisse ist der Exponent $= 6$, also sind die Verhältnisse einander gleich, und bilden daher eine geometrische Proportion.

Zusatz 1. Enthält nun eine Proportion 2 unbekannte Größen, eine andere Proportion eine von diesen, so lassen sich die Glieder der beiden Proportionen so versetzen, daß die gemeinschaftliche unbekannte Größe in der einen Hinterglied, in der andern Vorderglied wird. Multiplizirt man dann die Glieder der Ordnung nach miteinander, so kann ein Verhältniß durch die gemeinschaftliche unbekannte Größe dividirt werden, daß man eine Proportion mit einer unbekannten Größe erhält. Z. B.

$$\begin{array}{l} 7 : 4 = y : x \\ 3 : 5 = 8 : y \\ \hline 21 : 20 = 8 \,.\, y : x \,.\, y \\ 21 : 20 = 8 : x. \end{array}$$

Zusatz 2. Dieses gilt in ähnlicher Art von mehreren Proportionen, wenn die nämliche unbekannte Größe immer Hinterglied in der einen und Vorderglied in der nächst folgenden Proportion ist. Z. B.

$$\begin{array}{l} 4 : 7 = 9 : y \\ 2 : 5 = y : z \\ 3 : 4 = z : x \\ \hline 24 : 140 = 9 : x \\ 2 : 35 = 3 : x = \frac{105}{2} = 52\frac{1}{2}. \end{array}$$

Eine auf diese Weise durch Multiplikation zweier oder mehrerer Proportionen entstandene Proportion heißt man zusammengesetzt.

§. 111.

I. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede. Von der Proportion:

$$21 : 7 = 9 : 3 \text{ ist}$$

$$21 \pm 9 : 7 \pm 3 = 21 : 7 = 9 : 3, \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{r} 30 : 10 \\ 12 : 4 \end{array}\right\} = 21 : 7 = 9 : 3.$$

In jedem dieser Verhältnisse ist der Exponent $= \frac{1}{3}$, also bilden die ersten Verhältnisse mit jedem der beiden andern eine Proportion.

II. Es verhalten sich die Summen der homologen Glieder zu einander, wie deren Differenzen:

$$21 + 9 : 7 + 3 = 21 - 9 : 7\ 3, \text{ oder}$$
$$30 : 10 = 12 : 4$$

III. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zur Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder, wie zwei homologe Glieder zu einander.

$$21 \pm 7 : 9 \pm 3 = 21 : 9 = 7 : 3, \text{ oder}$$
$$\left.\begin{array}{l} 28 : 12 \\ 14 : 16 \end{array}\right\} = 21 : 9 = 7 : 3$$

Der Beweis ergibt sich wieder aus der Gleichheit der Exponenten oder aus I., wenn man die mittleren Glieder verwechselt.

IV. Bei mehreren gleichen Verhältnissen verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede. Z. B.

Aus $2 : 4 = 5 : 10 = 3 : 6 = 6 : 12$ entsteht

$$2 + 5 + 3 + 6 : 4 + 10 + 6 + 12 = 2 : 4 = 5 : 10 \text{ ꝛc.}$$
$$16 : 32 = 2 : 4 = 5 : 10 \text{ ꝛc.}$$

§. 112.

Aufgabe. Eine Zahl in mehrere Theile nach gegebenen Verhältnissen (in proportionirte Theile) zu theilen.

Auflösung. Man bilde die Proportion: Es verhält sich die Summe aller Verhältnißzahlen zu der zu theilenden Zahl, wie jede einzelne Verhältnißzahl zum entsprechenden Theile.

Beispiele. I. Man theile 120 in 3 Theile, welche sich zu einander verhalten, wie die Zahlen 3, 4, 5.

Auflösung und Beweis. Bezeichnet man die 3 Theile mit x, y, z, so wird nach dem Sinne der Aufgabe

$$3 : 4 = x : y$$
$$4 : 5 = y : z, \text{ oder nach §. 108.}$$
$$3 : x = 4 : y$$
$$4 : y = 5 : z,$$
$$\text{also } 3 : x = 4 : y = 5 : z, \text{ und}$$
$$3 + 4 + 5 : x + y + z = 3 : x = 4 : y = 5 : z \text{ (§. 111. IV.)}$$

Die Summe der Theile x, y, z machen aber die zu theilende Zahl aus; daher

$$12 : 120 = 3 : x = 4 : y = 5 : z, \text{ oder}$$
$$1 : 10 = 3 : x = 30$$
$$= 4 : y = 40$$
$$= 5 : z = 50.$$

II. Man theile die Zahl 183 in 4 Theile nach den Verhältnissen $= 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$.

Auflösung. Es ist $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5} = 30 : 15 : 10 : 6$

$$30 + 15 + 10 + 6 = 61$$
$$61 : 183 = 30 : x = 15 : y = 10 : z = 6 : v$$
$$1 : 3 = 30 : x = 90$$
$$= 15 : y = 45$$
$$= 10 : z = 30$$
$$= 6 : v = 18$$
$$\overline{183.}$$

II. Hauptstück.

Anwendung der geometrischen Proportionen auf benannte Zahlen.

§. 113.

Die Lehre von den geometrischen Proportionen kann auf Erfahrungsgegenstände dann angewendet werden, wenn diese in solcher Beziehung zu einander stehen, daß dem Vielfachen des einen Gegenstandes ein eben so Vielfaches oder ein eben so vielter Theil des andern entspricht. Z. B. Waaren der nämlichen Art und ihre Preise: der zwei-, drei-, vier- rc. fachen Anzahl von Ellen, Pfunden entspricht auch der zwei-, drei-, vier- rc. fache Preis. Oder Arbeiter und Zeit, in welcher sie eine bestimmte Arbeit vollenden: zweimal so viel Arbeiter brauchen nur die Hälfte, dreimal so viel Arbeiter nur den dritten Theil der Zeit. Sind zwei Gegenstände nicht von einander abhängig, oder ist zwar die Zunahme eines Gegenstandes mit der Zu- oder Abnahme eines andern verbunden, aber nicht in einer der bezeichneten Arten, so kann darauf die geometrische Proportion auch nicht angewendet werden. Von solcher Beschaffenheit sind z. B. Anzahl von Reisenden, welche zugleich den nämlichen Weg machen, und die Zeit, in welcher sie diesen zurücklegen; der Raum, welchen ein Körper

im freien Falle durchlaûft, und die Zeit, welche er dazu braucht. Die Gegenstände des ersten Beispiels sind gar nicht, die des zweiten nicht in der bezeichneten gleichförmigen Art von einander abhängig.

Die Gegenstände, bei welchen die geometrische Proportion angewendet werden kann, können, wie schon oben angedeutet worden ist, in zweifach verschiedener Beziehung zu einander stehen, entweder in solcher, daß mit der Zunahme des einen auch die Zunahme des andern, und mit der Abnahme des einen auch die Abnahme des andern verbunden ist; oder in solcher, daß der Zunahme des einen die Abnahme des andern entspricht. Die erste Beziehung heißt man ein gerades, die zweite ein verkehrtes Verhältniß.

Welche Gegenstände in dem einen oder andern Verhältnisse und in welchem sie zu einander stehen, muß Beurtheilungskraft und Erfahrung entscheiden. Vergl. unten §. 121. die Tabelle.

§. 114.

Das Verfahren, aus drei gegebenen benannten Gliedern (tribus terminis) einer geometrischen Proportion das vierte Glied zu finden, heißt die Regel de Tri, und zwar

1) die gerade, wenn die verglichenen Größen der Proportion in einem geraden,

2) die verkehrte, wenn sie in einem umgekehrten Verhältnisse stehen. — Doch haben beide eine und die nämliche Form; nur die Ordnung der Glieder ist verschieden.

Anmerkung. Man nennt die Regel de Tri wegen ihrer Vortrefflichkeit überhaupt die kaufmännische Rechnung, oder die goldene Regel (Regula aurea).

A) Regel de Tri.

§. 115.

Bei Behandlung der Regel de Tri-Aufgaben sind drei Momente zu berücksichtigen:

I. Die Formation oder der Ansatz,

II. die Reduktion,

III. die Solution, nebst der Probe.

I. Formation. In jeder Regel de Tri kommen vier Glieder vor, wovon zwei und zwei gleichbenannt sind. Ein gleichbenanntes Paar ist gegeben, von dem andern Paare wird das

zweite Glied gesucht. Jenes Glied, dem die Frage angehängt wird, heißt das Frageglied; das abhängige aber heißt das unbekannte Glied, wofür x, y, z steht.

Gleichbenannte Größen müssen immer in ein Verhältniß zusammengesetzt werden. Außerdem wird

a) gewöhnlich folgende Ordnung beobachtet. Das unbekannte Glied wird viertes; das Frageglied bei einem geraden Verhältnisse zweites, bei einem verkehrten erstes Glied der Proportion.

Beispiele.

1) 2 Ellen kosten 5 fl.; was (wie viele fl.) kosten 8 Ellen?

Waaren und Preis stehen in geradem Verhältnisse, das Frageglied ist 8 Ellen; daher der Ansatz:

$$\begin{matrix} \text{E.} & \text{E.} & \text{fl.} & \text{fl.} \\ 2 : 8 & = & 5 : x. \end{matrix}$$

2) 6 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit 25 Tage; wie lange brauchen dazu 10 Arbeiter?

Arbeiter und Zeit stehen im verkehrten Verhältnisse, das Frageglied ist 10 Arbeiter; daher der Ansatz:

$$\begin{matrix} \text{A.} & \text{A.} & \text{T.} & \text{T.} \\ 10 : 6 & = & 25 : x. \end{matrix}$$

Der Grund dieser Ansätze beruht auf folgenden zwei Sätzen:

1) Die zwei in ein Verhältniß zusammenzusetzenden benannten Zahlen müssen gleichartig seyn, da das Hinterglied durch Multiplikation des Vordergliedes mit dem unbenannten Exponenten entstanden gedacht werden muß.

2) Die Exponenten der beiden Verhältnisse müssen gleich, folglich diese beiden zugleich steigend oder fallend seyn. Nun ist einleuchtend, daß im ersten Beispiele $x > 5$, im zweiten $x < 25$, das Verhältniß $5 : x$ also steigend, $25 : x$ fallend werden muß. Daher muß auch das erste Verhältniß im ersten Beispiele als ein steigendes, im zweiten als ein fallendes dargestellt werden.

b) Es kann das unbekannte Glied auch an jede andere Stelle der Proportion zu stehen kommen; nur müssen dann auch die übrigen Größen so geordnet werden, daß gleichbenannte Größen in ein Verhältniß, das unbekannte Glied und Frageglied bei einem geraden Verhältnisse als homologe, bei verkehrtem als äußere oder innere Glieder gesetzt werden.

c) Auch bei einem verkehrten Verhältnisse können das Frage- und unbekannte Glied als homologe Glieder gesetzt werden; nur müssen dann das Frageglied und das damit gleichbenannte Glied als Nenner von Brüchen dargestellt werden, deren Zähler 1 ist. So ist von obigem zweiten Beispiel das Verhältniß:

$$\begin{matrix} \text{A.} & \text{A.} & \text{A.} & \text{A.} \\ 10 : 6 & = & \frac{1}{6} : \frac{1}{10} \end{matrix}$$

II. Reduktion. Man bringe die einzelnen Glieder durch Reduziren oder Resolviren auf eine einzige, und zwar die Glieder eines Verhältnisses auf die nämliche Benennung, wenn sie nicht in bemerkter Art schon gegeben sind. Dann kann man die Benennung der Glieder des bekannten Verhältnisses hinweglassen, weil durch dieses nur der Exponent, eine unbenannte Zahl (§. 42. II.), wodurch das mit x gleichbenannte Glied zu multipliziren (wenn x ein Vorderglied, zu dividiren) ist, bestimmt wird. Brüche schaffe man nach §. 109. Zus. 2. hinweg.

Beispiele.

a) 1 ℔ : $\frac{7}{8}$ ℔ = 48 kr. : x kr.
$\frac{8}{8}$ ℔ : $\frac{7}{8}$ ℔ = 48 kr. : x kr.
8 : 7 = 48 kr. : x kr.

b) 1 Loth : 17 Ztr. = 3 Pf. : x fl.
1 Loth : $17 \times 100 \times 32$ Loth = $\frac{3}{240}$ fl. : x fl.
240 : $17 \times 100 \times 32$ = 3 fl. : x fl.

c) 1 Schfl. : 149 Schfl. 5 Metz. 3 Viert. 2 Sechsz.
= 12 fl. : x fl.
96 Schztl. : 14398 Schztl. = 12 fl. : x fl.
96 : 14398 = 12 fl. : x fl.

III. Solution. Man verkleinere, so weit es möglich ist, ein inneres Glied in Verbindung mit einem äußeren, suche nach §. 106. Zus. 1. das x, und gebe dem Werthe von diesem die Benennung des damit in einem Verhältnisse stehenden bekannten Gliedes.

Beispiele.

a) 8 : 7 = 48 kr. : x kr.
: 8) 1 : 7 = 6 kr. : x kr.
x = 7.6 = 42 kr.

b) 240

b) $24\not{0} : 17 \cdot 10\not{0} \cdot 32 = 3$ fl. : x fl.
: 8) $3 : 170 \cdot 4 = 3$ fl. : x fl.
: 3) $1 : 170 \cdot 4 = 1$ fl. : x fl.
$x = 680$ fl.

c) $96 : 14393 = 12$ fl. : x fl.
: 12) $8 : 14398 = 1$ fl. : x fl.
$x = \frac{14398}{8} = \frac{7199}{4} = 1799$ fl. 45 kr.

Die Probe wird dadurch gemacht, daß man entweder

1) die ganze Proportion in die identische:
   $1 : 1 = 1 : 1$ verwandelt; oder daß man
2) zeigt, das Produkt der äußeren Glieder sey jenem der mittleren gleich; oder daß man
3) die Proportion umkehrt, und mit Hülfe des gefundenen vierten Gliedes ein anderes sucht, das man als unbekannt annehmen will; gewöhnlich nimmt man dazu das mit dem vorhin unbekannten gleichbenannte Glied.

Beispiele.

a) 8 ℔ : 7 ℔ = 48 kr. : 42 kr.
: 8) 1 : 7 = 6 : 42
: 7) 1 : 1 = 6 : 6
: 6) 1 : 1 = 1 : 1

b) 8 ℔ : 7 ℔ = 48 kr. : 42 kr.
$8 \cdot 42 = 7 \cdot 48$
$336 = 336.$

c) 7 ℔ : 8 ℔ = 42 kr. : x kr.
$x = \frac{8 \cdot 42}{7} = 8 \cdot 6 = 48$ kr.

Anmerkung. Die Regel de Tri-Aufgaben, worin das erste Glied 1 ist, sind bloße Multiplikations-, jene, worin das zweite Glied = 1 ist, bloße Divisions-Beispiele.

§. 116.

Regel de Tri-Aufgaben.

I. Wenn 65 Ztr. 130 fl. kosten, was 80 Ztr.?

Auflösung. 65 Ztr. : 80 Ztr. = 130 fl. : x fl.

$$x = \frac{130 \times 80}{65} = \frac{10 \times 80}{5} = 160 \text{ fl.}$$

II. Wenn ich mir in $3\frac{1}{2}$ Tagen $3\frac{3}{4}$ fl. erwerben kann, was in 14 Tagen?

Auflösung. $3\frac{1}{2}$ T. : 14 T. = $3\frac{3}{4}$ fl. : x fl.

$$\not{7}.\not{4} : \not{14}.\not{2} = 15 : x$$

$$x = 15 \text{ fl.}$$

III. Wenn 3 Loth Kaffee 7 kr. 2 pf. kosten, was 28 Ztr. 27 Pf. 24 Loth 3 Quintl?

Auflösung. 28 Ztr. 27 Pf. 24 Loth 3 Qtl. = 361955 Qtl., 3 Loth = 12 Qtl.

12 Qtl. : 361955 Qtl. = $\frac{15}{2}$ kr. : x kr.

$$x = \frac{361955 \times 5}{8} = 3770 \text{ fl. } 21 \text{ kr. } 3 \text{ pf. } 1 \text{ hl.}$$

IV. Wie viele Gulden Zins tragen 8420 fl. Kapital zu $4\frac{1}{2}$ Prozent?

Erklärung. Leiht A dem B eine Summe Geldes K auf einige Zeit unter der Bedingung, daß ihm dieser für die Benützung eine bestimmte Summe Z gebe; so heißt A der Glaubiger, B der Schuldner, K das Kapital, Z die Zinsen oder Interessen. Diese werden gewöhnlich im Verhältniß zu 100 (und für ein Jahr) bestimmt, wornach die Verhältnißzahl Prozent heißt, und mit p. c. oder % bezeichnet wird. Hin und wieder, jedoch seltner (z. B. bei Spesen) wird bei einer solchen Vergleichung die Zahl 1000 zu Grunde gelegt, die Verhältnißzahl alsdann Promille genannt und mit p. m. oder ‰ bezeichnet. Obige $4\frac{1}{2}$ p. c. drücken demnach aus: für jedes dargeliehene Kapital von 100 fl. werden $4\frac{1}{2}$ fl. Zinsen bezahlt. Daher

Auflösung. 100 fl. Kap. : 8420 fl. K. = $4\frac{1}{2}$ fl. Z. : x fl. Z.

$$200 : 8420 = 9 : x$$

$$10 : 421 = 9 : x$$

$$x = 378{,}9 \text{ fl.} = 378 \text{ fl. } 54 \text{ kr.}$$

V. Zu wie viel Prozent ist ein Kapital von 7000 fl. ausgeliehen, wenn es jährlich 245 fl. Zinsen trägt?

Auflösung. 7000 fl. K. : 100 fl. Kap. = 245 fl. Z. : x fl. Z.

$$x = 3\tfrac{1}{2}\ \%$$

VI. A hat dem B ein Kapital geliehen, und nach Ablauf eines Jahres an Kapital und Zinsen 6240 fl. erhalten. Wie viel betrug das Kapital, wie viel erhielt er Zinsen, wenn 4 % gerechnet werden?

Auflösung. 104 fl. K. u. Z. : 6240 fl. K. u. Z. = 100 fl. K. : x fl. K.
x = 6000 fl. Kapital
Zinsen: 6240 fl. — 6000 fl. = 240 fl.

VII. A und B unternahmen gemeinschaftlich ein Geschäft, und gewannen dabei zusammen 1200 fl. Wenn nun auf A bei einer Anlage von 2000 fl. ein Gewinn von 300 fl. traf, wie viel hat B eingelegt?

Auflösung. 300 fl. Gew. : 900 fl. Gew. = 2000 fl. Einl. : x fl. Einl.
x = 6000 fl.

VIII. Eine Arbeit wird von 10 Arbeitern in einer Woche vollendet; wann wird dieselbe ausgeführt, wenn die Zahl der Arbeiter um 2 vermindert wird?

Auflösung. 8 Arb. : 10 Arb. = 6 T. : x = $7\frac{1}{2}$ Tage.

IX. Eine viereckige Wiese von $121\frac{1}{2}'$ Länge und $70\frac{2}{5}'$ Breite soll gegen eine andere vertauscht werden, welche 54′ breit ist; wie lang muß diese seyn, bei beiden gleiche Bonität vorausgesetzt?

54′ Br. : $70\frac{2}{5}'$ Br. = $121\frac{1}{2}'$ L. : x′ L.
x = 159′

X. Wie lange müssen 2902 fl. 30 kr. ausgeliehen werden, daß sie bei gleichem Zinsfuße eben so viel Interesse tragen, als 1548 fl. in $7\frac{1}{2}$ Jahren tragen?

$2902\frac{1}{2}$ fl. K. : 1548 fl. K. = $7\frac{1}{2}$ J. : x J.

$$\frac{5805}{2} : 1548 = \frac{15}{2} : x$$

$$387 : 1548 = 1 : x$$

$$1 : 4 = 1 : x = 4 \text{ Jahre.}$$

B) Wälsche Praktik,

oder

Rechnungsvortheile zum Kopfrechnen und zu kaufmännischen Rechnungen.

§. 117.

Da die Regel de Tri die eigentliche Rechnung des bürgerlichen und kaufmännischen Lebens ist, so wird es leicht begreiflich, daß Uebung und Nachdenken so manche Rechnungsvortheile erfunden haben, wodurch die Auflösung der Regel de Tri-Beispiele leichter und kürzer wird. Der Inbegriff dieser Rechnungsvortheile, nebst der Art, sie anzuwenden, heißt insgemein: die wälsche oder italienische Praktik.

Die Hauptregel der wälschen Praktik ist: „Suche die Regel de Tri in eine einfache Multiplikation und Division zu verwandeln, so daß die Summe der einzelnen Produkte oder Quotusse, welche sich größtentheils im Sinne berechnen lassen, das Fazit oder den Werth für die unbekannte Größe gibt.“

Anmerkung 1. Regel de Tri-Aufgaben, worin das erste Glied eine Primzahl enthält, welche in keinem der beiden übrigen Glieder als Faktor enthalten ist, oder solche, worin die Glieder viele Unterabtheilungen ungleich benannter Zahlen enthalten, gehören in der Regel nicht zur wälschen Praktik.

Anmerkung 2. Die Schule kann nur auf einige solche Rechnungsvortheile aufmerksam machen; mehrere wird und muß die Uebung lehren.

§. 118.

Besondere Regeln der wälschen Praktik.

I. Anstatt mit einer mehrzifferigen Zahl (z. B. 12, 24, 25), welche keine Primzahl ist, zu multipliziren oder dividiren, multiplizirt oder dividirt man mit den einzelnen Faktoren derselben.

Beispiele. a) Fünfzehn Maß Wein 24 fl. 15 kr., was 1 Maß?

Operation. ~~15~~ M. : 1 M. = 24 fl. 15 kr. : x
3) ~~5~~ = 8 ~~5~~
5) 1 = 1 37
also x = 1 fl. 37 kr.

b) Der Zentner Kaffee 228 fl., was 35 Zentner?

Operation.
228 fl.
5
1140
7
x = 7980 fl.

II. Ist der Multiplikator eine gemischte Zahl, so sucht man zuerst das Produkt aus dem Ganzen, dann aus dem Bruche.

Beispiel. Die Elle Tuch 7 fl., was $20\frac{1}{6}$ Ellen?

Operation. 1 Elle : $20\frac{1}{6}$ E. = 7 fl. : x
140 fl.
1 10 kr.
x = 141 fl. 10 kr.

III. Brüche, welche zum Zähler eine größere Zahl als 1, zum Nenner aber keine Primzahl haben, sucht man in mehrere kleinere zu zerstreuen, so daß sich einer aus dem andern berechnen läßt, und alle zum Zähler 1 erhalten.

Erklärung.

$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{13}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$
$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{11}{60} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$
$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$	$\frac{23}{60} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$
$\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$	$\frac{41}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{60}$
$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	u. s. w.

Beispiele. a) Die Elle Tuches 8 fl. 45 kr., was $7\frac{5}{8}$ Ellen?

Operation. $1 : 7\frac{5}{8} = 8$ fl. 45 kr. : x

61 fl. 15 kr.	Preis von 7 Ellen.	
4 fl. $22\frac{1}{2}$ kr.	" "	$\frac{1}{2}$ Elle.
1 fl. $5\frac{1}{2}$ kr. 1 hl.	" "	$\frac{1}{8}$ Elle.
x = 66 fl. 43 kr. 1 hl.		

b) Der Zentner Zucker 197 fl.; was $\frac{13}{16}$ Ztr.?

Operation. 197 fl.

$\frac{1}{2}$	98 fl. 30 kr.
$\frac{1}{4}$	49 fl. 15 kr.
$\frac{1}{16}$	12 fl. 17 kr. 3 pf.
	x = 160 fl. 2 kr. 3 pf.

IV. Wenn verschiedene Unterabtheilungen Geldes oder Gewichtes u. s. w. durch ganze Zahlen zu multipliziren sind, so verwandelt man die niedrigeren Ordnungen in Theilbrüche der höheren.

Erklärung.

15 kr. $= \frac{1}{4}$ fl.	25 Pfund $= \frac{1}{4}$ Zentner.
30 " $= \frac{1}{2}$ "	50 " " $= \frac{1}{2}$ " "
45 " $= \frac{3}{4}$ "	75 " " $= \frac{3}{4}$ " "
7 kr. 2 pf. $= \frac{1}{8}$ "	8 Loth $= \frac{1}{4}$ Pfund.
22 " 2 " $= \frac{3}{8}$ "	16 " $= \frac{1}{2}$ " "
	24 " $= \frac{3}{4}$ " " u. s. w.

Anmerkung. Am bequemsten ist die Sechserrechnung; denn da 6 kr. $= \frac{1}{10} = 0{,}1$ fl., so darf man, um eine Anzahl Sechser (z. B. 345) in Gulden zu verwandeln, nur die letzte

Ziffer zur Rechten abschneiden; diese bedeutet Sechser, die übrigen ganze Gulden; also 345 Sechser = 34 fl. 30 kr.

12 kr., 18 kr., 24 kr., 36 kr., 42 kr., 48 kr., 54 kr.
= 2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 8 , 9 Sechser.

Beispiele. a) Ein seidenes Halstuch kostet einen Bayerthaler; was deren 14 Dutzend?

Operation. 14 . 12 = 28 . 6 = 168.

1 Halst. : 168 H. = 2 fl. 4 Sechser : x S.
336 fl.
67 fl. 12 kr.
x = 403 fl. 12 kr.

b) Das Pfund Rosinen 40 kr., was 4 Ztr. 25 Pfd.?

Operation. 40 kr. = $\frac{2}{3}$ fl.
4 Ztr. 25 Pfd. = 425 Pfd.?

× $\frac{1}{3}$ fl.	141 fl. 40 kr.
× $\frac{1}{3}$ fl.	141 fl. 40 kr.
	x = 283 fl. 20 kr.

V. Ist mit Brüchen zu multipliziren, deren Zähler um 1 kleiner ist, als der Nenner, z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{19}{20}$ u. s. w., so zieht man vom Multiplikand den so vielten Theil desselben ab, als der Nenner anzeigt, d. i. man multiplizirt mit 1 weniger einem Bruche, dessen Zähler 1 und dessen Nenner der gegebene Nenner.

Beispiele. a) 1 Ztr. Indigo 832 fl.; was $\frac{19}{20}$ Ztr.?

Operation. 832 fl. — kr.	1 Ztr.
— 41 fl. 36 kr.	— $\frac{1}{20}$ Ztr.
x = 790 fl. 24 kr.	

b) Eine Elle 10 fl. 24 kr.; was $\frac{7}{8}$ Ellen?

Operation. 10 fl. 24 kr.	1 Elle.
— 1 fl. 18 kr.	— $\frac{1}{8}$ Elle.
9 fl. 6 kr.	

VI. Man verwechselt die Benennung der mittleren Proportionsglieder, je nachdem sich das eine derselben schicklicher in einen Bruchtheil höherer Ordnung verwandeln läßt, als das andere.

Beispiele. a) Die Strähne Garns 17 kr.; was 60 Strähnen?

Operation. Umgekehrt: was 17 Strähnen, wenn eine 60 kr. oder 1 fl. kostet; also x = 17 fl.

b) Das Pfund Anis 49 kr. 2 pf.; was $66\frac{3}{4}$ Pfd.?

Operation. Der Faktor 66 gibt 1 fl. 1 Sechser.

1 Pfd. : $49\frac{1}{2}$ Pfd. = $66\frac{3}{4}$ kr. : x

49 fl.	1 fl. $\times$ 49
4 fl. 54 kr.	1 Sechs. $\times$ 49
33 kr.	$\frac{1}{2} \times 66$
24 kr. 3 pf. . .	$49\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
12 kr. 1 pf. 1 hl.	— $\times \frac{1}{4}$
55 fl. 4 kr. — pf. 1 hl.	

c) Wenn eine Maß Bier 4 kr., 4 kr. 2 pf., 4 kr. 3 pf. kostet, was ein Eimer?

Antwort. Da der (Schenk-) Eimer 60 Maß hält, so kostet er so viele Gulden und Theile eines Gulden, als die Maß Kreuzer und Theile eines Kreuzers kostet; also für obige Voraussetzung 4 fl., $4\frac{1}{2}$ fl., $4\frac{3}{4}$ fl.

VII. In eigentlichen Proportionsaufgaben (worin kein Glied die Zahl 1 hat) sucht man mit dem ersten Gliede in eines der beiden übrigen (oder in beide, mittelst einer Zerfällung) zu dividiren, und also aus der Aufgabe eine bloße Multiplikation zu machen.

Beispiele.

a) 25 Ellen : 15 Ellen = 18 fl. 15 kr. : x

5:) 5 " : 3 " = 18 fl. 15 kr. : x

5:) 1 " : 3 " = 3 fl. 39 kr. : x

x = 10 fl. 57 kr.

b) 34 Stücke : 17 St. = 45 fl. 18 kr. : x

2 " : 1 " = 45 fl. 18 kr. : x

x = 22 fl. 39 kr.

c) Acht Stücke Schießgewehre 77 fl.; was 27 Stücke?

Operation.

8 St. : 27 St. = 77 fl. : x

1 " : $3\frac{3}{8}$ " = 77 fl. : x

3	231 fl.
$\frac{1}{4}$	19 fl. 15 kr.
$\frac{1}{8}$	9 fl. 37 kr. 2 pf.

x = 259 fl. 52 kr. 2 pf.

d) Wenn $12\frac{1}{2}$ Eimer 70 fl. kosten, was $26\frac{1}{2}$ Eimer?

Operation. Man schafft vor Allem die Brüche weg, indem man das dritte Glied der Proportion durch den Nenner

des ersten Gliedes multiplizirt, durch den Nenner des zweiten Gliedes aber dividirt.

$$12\tfrac{1}{2}\ \text{C.} : 26\tfrac{1}{5}\ \text{C.} = 70\ \text{fl.} : x$$
$$25\ \text{⸗} : 131\ \text{⸗} = \tfrac{140}{5}\ \text{fl.} : x$$
$$1\ \text{⸗} : 5\tfrac{6}{25}\ \text{⸗} = 28\ \text{fl.} : x$$

5	140 fl. — kr.
$\frac{1}{5}$	5 fl. 36 kr.
$\frac{1}{25}$	1 fl. $7\frac{1}{5}$ kr.

$$x = 146\ \text{fl.}\ 43\tfrac{1}{5}\ \text{kr.}$$

VIII. Ist ein Kapital (K) zu 5 oder 4 p. c. ausgeliehen, so findet man die Zinsen (Z) eines Jahres, wenn man das Kapital im ersten Falle durch 20 oder zuerst durch 10 und dann durch 2, im zweiten Falle durch 25 = 5.5 dividirt. Umgekehrt findet man das den Zinsen entsprechende Kapital, wenn man dieselben bei 5prozentiger Verzinsung mit 20 = 10.2, bei 4prozentiger mit 25 = 5.5 multiplizirt.

Beweis. a) $100 : K = 5 : Z$

$$20 : K = 1 : Z,\ \text{also}\ Z = \frac{K}{20}\ \text{und}\ K = Z \times 20$$

b) $100 : K = 4 : Z$

$$25 : K = 1 : Z,\ \text{also}\ Z = \frac{K}{25},\ K = Z \times 25.$$

C) Ueber den Gebrauch der Reduktionstabellen.

§. 119.

Am Ende des Buches sind drei Abtheilungen metrologischer Tafeln angehängt, wovon die zweite Abtheilung die neueren Maße, Gewichte und Münzen verschiedener auswärtiger Staaten, die dritte aber die Maße, Gewichte und Münzen der alten Römer, Griechen und Hebräer, mit dem neuen französischen und bayerischen Maße verglichen, enthält. Was den Gebrauch dieser Tafeln für die einfache Proportion betrifft, so gilt im Allgemeinen die Form: Wenn M Maße des Landes A... N Maße des Landes B fordern, wie viele (x) Maße des Landes B fordern n Maße des Landes A? — Die Beziehung der Zahlen M und N aufeinander kann auf folgende Art hergestellt werden.

In den sechs ersten Tabellen der zweiten Abtheilung, so wie bei einigen Tabellen der dritten Abtheilung sind die Maße

und Gewichte nach gleichartigen Elementen, d. i. nach allgemein angenommenen Ureinheiten (deren Anzahl also ungleich ist), miteinander verglichen. Für solche Reduktionen gilt im Allgemeinen die Proportion: Wenn 1 Maß des Landes A = M Elementen, und 1 Maß des Landes B = N Elementen, so verhält sich

1 Maß von A : 1 Maß von B = M : N und
N Maß von A = M Maß von B

Z. B. Sollen österreichische und preußische Ellen miteinander verglichen werden, so kann dieß

a) nach der ersten Spalte der III. Tabelle geschehen:

1 österr. Elle = 779,2 Millimeter, 1 preuß. Elle = 666,938 Millimeter

1 östr. E. : 1 pr. E. = 772,2 Mm. : 666,938 Mm.
= 772,2 : 666,938
1 östr. E. × 666,938 = 1 pr. E. × 772,2
666,938 östr. E. = 772,2 pr. E.

b) nach der letzten Spalte:

100 östr. Ellen = 93,54 bayer. Ellen
100 preuß. Ellen = 80,36 bayer. Ellen
100 östr. E. : 100 pr. E. = 93,54 b. E. : 80,36 b. E.
1 östr. E. : 1 pr. E. = 93,54 : 80,36
80,36 östr. E. = 93,54 pr. E.

Sollen bayerische Maße mit auswärtigen verglichen werden, so sind hiefür in den letzten Spalten die Vergleichungszahlen unmittelbar gegeben.

Anmerkung 1. Da die Maß- und Gewichts-Reduktionen, in gewöhnlicher Art vorgenommen, in der Regel wegen des langwierigen Multiplizirens und Dividirens sehr beschwerlich und doch unsicher würden, und daher die Berechnung mittelst Logarithmen vorzuziehen ist; so wurden da, wo es der Raum gestattete, nämlich bei der ersten und zweiten Tabelle, die Vergleichungs-Logarithmen beigefügt. Will man die Reduktion ohne Logarithmen und nur annähernd bestimmen, so kann man von den Verhältnißzahlen die Dezimalen oder Einer ꝛc. hinweglassen; ist aber die höchste hinweggelassene Ziffer > 5, so muß man hiefür die letzte behaltene Ziffer um 1 vermehren. Zu einer mehr annähernden Bestimmung kann man sich der Kettenbrüche bedienen. Vergl. unten §. 120. B.

Anmerkung 2. Die Tafeln der dritten Abtheilung, so wie die Tafeln VII., VIII. und IX. der zweiten Abtheilung

sind für sich verständlich. Die IX. Tafel, das System des neuen französischen Maßes enthaltend, bildet eigentlich die Grundtafel der ersten 6 Tafeln; rücksichtlich der Tafel VIII. vergl. §. 144. und I. Abth. IV. 8.

Beispiele.

I. Wie viele bayerische Ellen geben 500 österreichische?

Auflösung. (II. Abth. II. Tab.)

östr.		östr.		bayer.		bayer.
100	:	500	=	93,54	:	x
1	:	5	=	93,54	:	x
		x	=	467,7 b. Ellen.		

II. Wie viele bayerische Meilen geben 100 gewöhnliche englische Meilen?

Auflösung. Nach der letzten Spalte der III. Tabelle sind

14,98 bayer. Meilen = 1 Meridiangrad

72,91 engl. Meilen = 1 „ „

Also 14,98 bayer. Meilen = 72,91 engl. Meilen.

72,91 engl. M. : 100 engl. M. = 14,98 b. M. : x b. M.

$$x = \frac{14,98 \times 100}{72,91} = 20,54 \text{ b. M.}$$

III. Welchen Werth haben im $24\frac{1}{2}$ fl. Fuß 300000 Franken?

Auflösung. Nach II. Abth. VII. Tab. ist 1 Frank = 28 kr. 1 pf.

$$\text{Man setze 1 Frank} = \frac{28}{60}\text{ fl.} + \frac{1}{240}\text{ fl.}$$

$$\frac{300000 \times 28}{60} = 140000 \text{ fl.}$$

$$\frac{300000}{240} = 1250$$

$$141250 \text{ fl.}$$

IV. Caesar dictator aere alieno oppressus dixit: bis millies et quingenties centena millia (numûm seu sestertiorum) sibi esse oportere, ut nihil haberet. Appianus.

Auflösung. Nach Tabelle A. f. III. Abtheilung sind 250′000000 Sestertien = 250′000000 Sechser = 25′000000 fl. Genauer aber noch 4° : 24′739548 fl.

V. Wie viele österreichische Pfunde machen 3 Ztr. 76 Pf. des Frankfurter Leichtgewichts?

Auflösung. 3 Ztr. 76 Pf. = 3.108 + 76 = 400 Pf.
1 Frankf. Pf. = 467,914 Grammes; 1 östr. Pf. = 560,012 Gr.
1 Fr. Pf. : 1 östr. Pf. = 467,914 Gr. : 560,012 Gr.
= 467,914 : 560,012
1 östr. Pf. × 467,914 = 1 Fr. Pf. × 560,012
467,914 östr. Pf. = 560,012 Fr. Pf. oder annähernd
468 östr. Pf. = 560 Fr. Pf.
560 Fr. Pf. : 400 Fr. Pf. = 468 östr. Pf. : x östr. Pf.
7 Fr. Pf. : 10 Fr. Pf. = 234 : x = $334\frac{2}{7}$ östr. Pf.

VI. Was machen nach dem badischen Maße a) 60 Quadratfuß, b) 108 Kubikfuß des Darmstädter Maßes?

Auflösung. Nach Gründen der Geometrie verhalten sich Quadratfuße (Kubikfuße) verschiedener Länder, wie die Quadratzahlen (Kubikzahlen) der die Fuße ausdrückenden Verhältnißzahlen. Da nun 1 bad. Fuß = 300 Millimeter, 1 Darmst. Fuß = 250 Mm., so ist

a) 1 □' b. : 1 □' d. = $(300)^2 : (250)^2 = 90000 : 62500 = 36 : 25$
36 □' d. = 25 □' b.
36 □' d. : 60 □' d. = 25 □' b. : x □' b.
3 : 5 = 25 : x = $41\frac{2}{3}$ □' b.

b) 1 c' b. : 1 c' d. = $(300)^3 : (250)^3 = 27000000 : 15625000$
= 216 : 125
216 c' d. = 125 c' b.
216 c' d. : 108 c' d. = 125 c' b. : x c' b.
2 : 1 = 125 : x = $62\frac{1}{2}$ c' bad.

VII. Wie schwer ist ein Kronenthaler brutto?

Auflösung. Auf eine Vereinsmark = 288 Grän gehen nach Tabelle VIII. 6,3 Kronenthaler, also wiegt
1 Krthlr. 288 : 6,3 = 45,7 Grän = 2 Loth 9,7 Grän.

§. 120.

Aufgabe. Das Verhältniß zweier Münzen oder Gewichte oder anderer Maße nach ganzen Zahlen in der kleinsten Form und seiner wahren Größe entsprechend oder in einer kleineren Form annäherungsweise zu finden.

Auflösung. Man bestimme jede Einheit der zu vergleichenden Münzen oder Maße in gleichartigen Elementen, bilde daraus ein Zahlenverhältniß (§. 119.), und suche für diese Zahlen den größten gemeinschaftlichen Theiler. Reicht bei großen Ver-

hältnißzahlen ein annäherndes Verhältniß aus, so kann man dieselben als einen Bruch darstellen, diesen in einen Kettenbruch auflösen, und davon die Näherungswerthe bestimmen.

Beispiele. A. I. Welches ist das kleinste Verhältniß des Frank, des Kronen-, Konventions-, sächsischen und preußischen Thalers zum rheinischen Gulden (im 24 fl.-Fuß)?

Operation. 1 Frank $= 27$ kr. $5\frac{3}{4}$ hl. $= \frac{887}{4}$ hl.

1 Gulden $=$ 480 hl.

1 Fr. : 1 fl. $= \frac{887}{4} : 480$

$= 887 : 1920$

1920 Fr. $= 887$ fl.

Oder kürzer: Da 1 Frank $= \frac{887}{1920}$ fl., so ergibt sich durch Multiplikation mit 1920, 1920 Fr. $= 887$ fl.

Diese Zahlen haben keinen gemeinschaftlichen Theiler, daher ist ein kleineres Verhältniß nicht möglich.

Auf ähnliche Art findet sich:

10 Krth. $= 27$ fl., 5 Konv.-Th. $= 12$ fl., 5 sächs. Th. $= 9$ fl., 4 pr. Th. $= 7$ fl.

II. Welches ist das kleinste Verhältniß des Bayerthalers zum neuen französischen Thaler (à 5 Franks) nach dem 24 fl.-Fuß, wenn man den Fünffrankenthaler nach dem gewöhnlichen Kourse zu 2 fl. 20 kr. rechnet?

Operation. 1 Fünffrankenthaler $= 2\frac{1}{3}$ fl. $= \frac{7}{3}$ fl.

1 Bayerthaler $= 2\frac{2}{5}$ fl. $= \frac{12}{5}$ fl.

1 Fftl. : 1 Bayerth. $= \frac{7}{3} : \frac{12}{5}$.

$= 35 : 24$

35 Bayerthaler $= 24$ Fünffrankenth.

III. Welches ist das kleinste Verhältniß der bayerischen Elle zum französischen Mètre?

Operation. Die Auflösung kann verschieden geschehen; doch dürfte nach Tab. IX.* α) das kleinste Verhältniß, an das man sich im bürgerlichen Leben halten kann, so ziemlich das seyn:

10⌀⌀ Mètres $=$ 12⌀⌀ bayer. Ellen.

5 Mètres $=$ 6 bayer. Ellen.

IV. Welches ist das kleinste Verhältniß des bayer. Pfundes zum französischen Kilogramm?

Operation. 1 Kilogramm = 1000 Grammes.
1 bayer. Pfund = 560 Grammes.

Also $10\not{0}$ bayer. Pfund = $56\not{0}$ Kilogramm.
25 bayer. Pfund = 14 Kilogramm.

B. I. Welches ist das Näherungsverhältniß der badischen Elle zur bayerischen?

Operation. Nach Abth. II. Tab. II.

bad. bayer.
1 : 1 = 600 : 833,01
600 bayer. E. = 833,01 bad. E.

Löset man $\frac{600}{833{,}01} = \frac{60000}{83301}$ in einen Kettenbruch auf, so findet man dafür die Näherungswerthe: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{18}{25}$, $\frac{103}{143}$, d. i. es sind (mit Uebergehung der 3 ersten Näherungswerthe) annähernd 5 bayer. Ellen = 7 bad. Ellen, oder genauer 13 bayer. Ellen = 18 bad. Ellen u. s. w.

II. Welches ist das Näherungsverhältniß zwischen der bayerischen und gewöhnlichen englischen Meile?

Operation. Nach Abth. II. Tab. III.

bayer. engl.
1 : 1 = 7415 : 1523,97
7415 engl. M. = 1523,97 bayer. M.

Löset man $\frac{7415}{1523{,}97} = \frac{741500}{152397}$ in einen Kettenbruch auf, und bestimmt hiefür die Näherungswerthe, so geben diese $\left(\frac{4}{1}, \frac{17}{4}, \frac{21}{5}, \frac{87}{19} \ldots\right)$ an, daß annähernd 4 engl. Meilen = 1 bayer., genauer, 17 engl. M. = 4 bayer., 21 engl. M. = 5 b. M. seyen.

* Die drei ersten Näherungswerthe gelten auch für das Verhältniß der englischen Meile zur deutschen oder geographischen.

D. Zusammengesetzte Proportionen: Regel de Quinque, Septem, Novem, Kettenregel.

§. 121.

Oefters hängt die Größe eines Objektes von der Größe zweier oder mehrerer anderer Objekte in der Art ab, daß ersteres

mit jedem andern in einem geometrischen Verhältnisse steht. So hängt z. B. in der Aufgabe: „Wie viel fl. Zins geben 6600 fl. zu 4 p. c. in 18 Monaten?“ die Antwort von der Größe des Kapitals und von der Zeit bei einem bestimmten Zinsfuße ab. Solche Aufgaben können gelöset werden:

a) entweder durch eben so viele verschiedene Proportionen, als verschiedene Bestimmungsgründe vorhanden sind, wenn man für jede einzelne Proportion nur einen Bestimmungsgrund als veränderlich, die übrigen als gleichbleibend betrachtet, oder

b) durch eine einzige, aus der Verbindung mehrerer einfachen entstandene oder entstanden gedachte zusammengesetzte Proportion.

Obige Aufgabe kann auch so gestellt und aufgelöset werden:

a) Wie viel (y) fl. Zins tragen 6600 fl. in 1 Jahr zu 4 p. c.? Und: wie viel (x) fl. Zins trägt jenes Kapital in 18 Monaten, wenn es in 12 Monaten y fl. Zins trägt?

fl. K. fl. K. fl. Z. fl. Z.

$100 : 6600 = 4 : y = 264$ fl. Zins in einem Jahre.

M. M.

$12 : 18 = y\,(264) : x = 396$ fl. Zins in 18 Monaten.

b) Kürzer nach §. 110.

$$1\not{0}\not{0} . 12 : 66\not{0}\not{0} . 18 = 4 : x$$

$$2 : 11 . 18 = 4 : x$$

$$1 : 11 . 9 = 4 : x = 396 \text{ fl. Zins.}$$

Solche Aufgaben heißen zusammengesetzte Proportionen oder Aufgaben der zusammengesetzten Regel de Tri, und zwar nach der Anzahl der bekannten Größen: Aufgaben der Regel de Quinque, Septem, Novem u. s. w.

Jene benannten Zahlen, welche als Faktoren zu einem Gliede des einen Verhältnisses zusammengesetzt werden, können immer als Ursachen, die des andern Verhältnisses als Wirkungen betrachtet werden. Im obigen Beispiele sind Kapital und Zeit Ursachen, Zinsen Wirkung.

§. 122.

Nennt man die Ursachen allgemein bestimmende Größen, die Wirkungen aber bestimmte, so sind die jeder Wirkung entsprechenden Ursachen für die Fälle des praktischen Lebens in folgender Tabelle dargestellt.

Bestimmende	Bestimmte Größen.
I. Menge / Größe / Schwere der Waare. Preis eines Stückes.	Preis der Waare.
II. Kapital. Zeit d. Auslage. Prozent.	Zinsertrag.
III. Arbeitende Personen. Zeit oder Dauer der ganzen Arbeit. Stundenzahl eines Tages.	Das Werk nach Stücken, oder Länge, Breite, Höhe.
IV. Arbeiter. Taglohn. Zeit.	Wochen- oder Jahrlohn.
V. Verzehrende Dinge. Mundportion. Zeit.	Vorrath von Lebensmitteln.
VI. Meilenweite. Anzahl der Zentner. Lohn für einen Zentner, eine Meile.	Der ganze Frachtlohn.
VII. Brodgewicht. Getreidpreis.	Preis des Brodes.
VIII. Länge. Breite.	Fläche (z. B. das zu einem Kleide nöthige Tuch).
IX. Länge, Breite, Höhe, (Dicke, Tiefe.)	Körpermaß.
X. Anzahl der Stücke. Elemente eines Stückes.	Maß eines bestimmten Landes. Z. B. (Längen-, Körper-Maß, Gewicht.)
XI. Höhe. Länge. Scheiterlänge.	Das Holzmaß oder Holzquantum.

Zusatz. Alle diese zusammengesetzten Ursachen und Wirkungen stehen in einem gegenseitigen geraden Verhältnisse, d. i. mit dem multiplikativen Wachsen oder Fallen der Ursachen ist auch ein multiplikatives Wachsen oder Fallen der Wirkungen verbunden.

Z. B. Wenn 100 fl. Kapital in 1 Jahre 5 fl. Zins geben, so geben 7mal 100 fl. in 8.1 Jahre $5 \times 7 \times 8 = 280$ fl. Zins.

Wenn für 12 Ztr. 7 Meilen weit zu führen 8 fl. bezahlt werden, so wird man um 24 Ztr. 28 Meilen weit zu führen $2 \times 4 \times 8$ fl. bezahlen; denn $24 \times 28 = 12 \times 2.7 \times 4$.

Im Gegentheile stehen bei einerlei Wirkung (welche $= 1$ gesetzt wird) die Ursachen unter sich, und bei einerlei Ursache die Wirkungen ebenfalls unter sich im umgekehrten Verhältnisse.

Z. B. 1000 fl. Kapital tragen in 4 Jahren (oder auch zu 4 Prozent) eben so viel Zins, als 800 fl. Kapital in 5 Jahren (oder zu 5 Prozent). — Mithin

1000 fl. Kap. : 800 fl. Kap. = 5 Proz. : 4 Proz.

Um 4 Ztr. 9 Meilen weit zu führen, zahlt man (bei übrigens gleichen Umständen, welche die Proportion immer voraussetzt, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich gegeben ist) eben so viel, als für 18 Ztr., welche 2 Meilen weit geführt werden sollen; d. h. 4 Ztr. : 18 Ztr. = 2 Meil. : 9 Meil.

Anmerkung 1. Jede umgekehrte Proportion läßt sich in eine zusammengesetzte gerade verwandeln, wenn man den Ursachen ihre zugehörige Wirkung beigibt. In dieser Hinsicht werden die sogenannten verkehrten Regeln de Tri, quinque, septem, für das praktische Leben ganz entbehrlich. Deßwegen ist in der Folge unter zusammengesetzten Proportionen nur die gerade zu verstehen.

Anmerkung 2. Bei Aufgaben, in welchen sich die einzelnen Größen nicht ganz bestimmt nach Ursache und Wirkung unterscheiden lassen, ist der in §. 121. a) angegebene Ansatz nach einzelnen Proportionen vorzuziehen, indem man dabei veranlaßt ist, die Art des Verhältnisses, in welcher 2 Objekte zu einander stehen, genauer zu erforschen.

Anmerkung 3. Bei zusammengesetzten Aufgaben ist zu rathen, daß man vor dem Ansatze, um den Ueberblick leichter zu gewinnen, die in dem einen Theile der Aufgabe vorkommenden Zahlen (Bedingungszahlen) in eine horizontale Reihe schreibe, und darunter die gleichbenannten Zahlen (Fragezahlen) des anderen Theiles.

§. 123.

Beispiele.

I. Einer Regel Quinque.

Wenn ein Pferd mittelst eines Göpels in 8 Stunden 400 Ztr. 40 Klafter hoch hebt, wie viel Ztr. wird es in 6 Stunden 36 Klafter hoch heben?

Auflösung.

St.	St.	Kl.	Ztr.	Kl.	Ztr.

$$8 : 6 = 40 . 400 : 36 . x$$
$$1 : 1 = 5 . 400 : 6 . x$$
$$1 : 1 = 5 . 200 : 3 . x$$
$$x = \frac{1000}{3} = 333\tfrac{1}{3} \text{ Ztr.}$$

Anmerkung. Mehrere zu den Aufgaben über zusammengesetzte Proportionen gehörige Beispiele siehe unten §. 129.

II. Einer Regel Septem.

1) Zwei Mäher mähen eine Wiese von 2000 □ Ruthen in 4 Tagen ab, wenn sie des Tages 4 Stunden lang arbeiten; wie lange

lange werden 12 Mäher an einer andern Wiese von 36000 □ Ruthen zu arbeiten haben, wenn sie des Tages 8 Stunden mähen?

Auflösung.

2000 □ R. : 36.000 □ R. = 2 M. 4 T. 4 St. : 12 M. 8 St. x T.
1 : 18 =

$$x = \frac{18.2.4.4.}{12.8} = 6 \text{ Tage.}$$

Diese Aufgabe, in drei Proportionen aufgelöset, heißt:

1) 2000 □ Ruthen können in 4 Tagen abgemäht werden, wie viel (z) Tage erfordern 36000 □ R.?

2) Bei einer Beschäftigung von 4 Stunden an jedem Tage sind z Tage nöthig, wie viel (y) Tage bei einer Beschäftigung von 8 Stunden an jedem Tage?

3) Zwei Mäher vollenden die angezeigte Arbeit bei den angegebenen Arbeitsstunden in y Tagen, in wie viel (x) Tagen 12 Mäher?

Die erste Proportion ist eine gerade, die zwei letzten Proportionen sind verkehrte. Also

2000 □ R.	: 36000 □ R.	= 4 T.	: z T.
8 St.	: 4 St.	= z	: y
12 M.	: 2 M.	= y	: x
2000.8.12	: 36000.4.2	= 4	: x

Um diese Proportion auf den obigen Ansatz zurückzuführen, ist nur die Bemerkung nothwendig, daß es in Beziehung auf das Resultat der Rechnung gleichgiltig ist, bei welchem der beiden mittleren Glieder irgend eine Zahl als Faktor steht; dasselbe gilt auch von den äußeren Gliedern.

2) Ein Schmied verdient sich in einer Woche 4 fl. 48 kr., ein Schlosser 6 fl. 15 kr. Wie viele Wochen müssen 12 Schlosser arbeiten, um sich so viel zu verdienen, als 25 Schmiede in 10 Wochen?

Auflösung.

Setzt man den Gesammtverdienst der Schmiede, so wie der Schlosser = 1, so ist

fl. Schm. W. fl. Schl. W.

$$1 : 1 = 4\tfrac{4}{5} \,.\, 25 \,.\, 10 : 6\tfrac{1}{4} \,.\, 12 \,.\, x$$

$$x = 16 \text{ Wochen.}$$

III. Einer Regel Novem.

Für die Garnison einer Festung, bestehend aus 2000 Mann, reicht der Proviantvorrath von 24.000 Fässern Mehles, jedes Faß zu 4 Ztr., wenn ein Mann des Tages 40 Lothe Mundvorrath erhält, auf 8 Monate hin. Auf wie viele Monate wird die Garnison einer andern Festung, worin 10.000 Mann liegen, bei täglicher Mundportion von 30 Loth, mit 60.000 Fässern Mehles, jedes zu 7 Zentnern, ausreichen?

Auflösung.

	Mann	F.	Z.	Loth. M.	Mon.
Bedingungszahlen:	2000	24000	4	40	8
Fragezahlen:	10000	60000	7	30	x

F. Z. F. Z. M. L. M. M. L. M.

$$\cancel{2}\cancel{4}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} . \cancel{4} : \cancel{6}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} . 7 = \cancel{2}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} . 4\cancel{0} . \cancel{8} : 1\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} . 3\cancel{0} . x$$

$$\cancel{3} \qquad x = \frac{28}{3} = 9\tfrac{1}{3} \text{ Monat.}$$

IV. Einer Regel Undecim.

1. Es war ein Kapital von 3000 fl. zu $4\frac{2}{3}$ p. c. ausgeliehen, aus dessen dreijährigen Zinsen man von 3 zu 3 Jahren Brod kaufte, um es unter 50 Arme zu vertheilen. Wenn nun das nächste Mal die Vertheilung unter 75 Arme in der Art geschehen soll, daß jeder noch so viel erhalte, als das erstemal; wenn das Kapital um 500 fl. vermehrt, der Zinsfuß aber auf $4\frac{1}{2}$ p. c. herabgesetzt worden ist, und der Getreidpreis um $\frac{1}{3}$ niedriger steht: nach wie viel Jahren kann die Vertheilung geschehen?

Auflösung. Setzt man für die erste Vertheilung den Antheil eines Einzelnen = 1, und eben so den Getreidpreis = 1, so ist für die nächste Vertheilung der Antheil eines Einzelnen = 2, der Getreidpreis = $\frac{2}{3}$. Es sind

	fl. Kap.	J.	p. c.	Arme	Anth.	G. Pr.
Bedingungszahlen :	3000	3	$4\frac{2}{3}$	50	1	1
Fragezahlen :	3500	x	$4\frac{1}{2}$	75	2	$\frac{2}{3}$

Die Jahre der Vertheilung stehen mit dem Kapitale und Zinsfuße in verkehrtem, mit der Zahl der Armen, dem Antheile eines Einzelnen und dem Getreidpreise in geradem Verhältnisse. Daher

$$
\begin{array}{rcl}
3500 : 3000 &=& 3 : x \\
4\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3} &=& x : y \\
50 : 75 &=& y : z \\
1 : 2 &=& z : u \\
1 : \frac{2}{3} &=& u : v \\
\hline
3500 \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 50 . 1 . 1 : 3000 \cdot 4\frac{2}{3} . 2 . \frac{2}{3} &=& 3 : v
\end{array}
$$

$v = \frac{16}{3}$ Jahre $=$ 5 J. 4 Mon.

§. 124.

Wenn mehrere Proportionen so miteinander in Verbindung gesetzt werden, daß der Nachsatz der vorhergehenden Proportion jedesmal der Vordersatz der nächstfolgenden wird, so entsteht der sogenannte Kettensatz, oder die Kettenregel, welche nichts anders als eine zusammengesetzte Proportion ist, die in ihre einfachen aufgelöst worden. Jede dieser einfachen Proportionen aber ist aus dem in §. 106. Zus. 2. angeführten Gesetze abgeleitet. So kann man z. B. statt: 1 Ballen Papier = 10 Ries auch setzen: 1.1 Ballen = 10.1 Ries, woraus 1 Ballen : 1 Ries = 10 : 1 abgeleitet wird.

Die Kettenrechnung ist besonders bei dem Reduziren niedrigerer Einheiten auf höhere, und bei dem Resolviren höherer in niedrigere anwendbar.

Man habe die Aufgabe: **Wie viele Bayerthaler kostet 1 Ballen Schreibpapier, wenn 1 Bogen 3 Heller kostet?**

So wird der Kettensatz dieser seyn:

1 Bogen	: 1 Ballen	=	3.1 Heller	:	x B. Thlr.
1 Ballen	: 1 Ries	=	10	:	1
1 Ries	: 1 Buch	=	20	:	1
1 Buch	: 1 Bogen	=	24	:	1
480	: 1	=	1 Gulden	:	1 Heller
$2\frac{2}{5}$	: 1	=	1 B.Thlr.	:	1 Gulden
$480.2\frac{2}{5}$ Bg.	: 1 Bg.	=	3.10.20.24 B. Thlr.	:	x B. Thlr.
$480.2\frac{2}{5}$	: 1	=	3.10.20.24 B. Thlr.	:	x B. Thlr.

$x = 12\frac{1}{2}$ Bayerthaler.

Anmerkung. Solche Aufgaben werden leichter nach dem Reesischen Ansatze berechnet. (§. 126—130.)

E. Regula Falsi.

§. 125.

Wird eine Zahl dadurch gefunden, daß man eine andere willkürlich dafür annimmt (numerus falsus), unter der Voraussetzung, daß sie den Bedingungen der Aufgabe entspreche, so heißt dieses Verfahren Regula Falsi. Es besteht dieses in Folgendem.

Man nimmt nach Belieben eine Zahl an, verändert sie eben so, wie durch die Aufgabe in Rücksicht der gesuchten angedeutet ist. Entspricht das Resultat der Aufgabe vollkommen, so hat man die gesuchte Zahl errathen; außerdem setzt man die Proportion an: Wie sich verhält das gefundene Resultat zur willkürlichen Zahl, so verhält sich die gegebene Zahl zur gesuchten.

Beispiele.

I. In wie viel Jahren werden die Interessen eines Kapitals zu $4\frac{1}{2}$ Prozent der Hälfte des Kapitals gleich werden?

Auflösung. Nennt man die innerhalb x Jahren treffenden Interessen = 1, so ist das Kapital = 2.

$$4\tfrac{1}{2}\,\text{Z.} : 1\,\text{Z.} = 100\,\text{fl. K. } 1\,\text{J.} : 2\,\text{fl. K. } x\,\text{J.}$$

$$x = \frac{100.2}{9.2} = 11\tfrac{1}{9}\ \text{Jahr.}$$

II. Ein Landmann führte 702 Garben in seine Scheune, das Uebrige hatte er als Zehend abgegeben. — Wie viele Garben hatte derselbe gebunden, und was hatte der Zehend betragen?

Auflösung. 10 Garben Ertrag geben nach Abzug des Zehends 9 Garben Einfuhr; also

$$9 : 10 = 702\ \text{Garb.} : x$$

$$x = \frac{702.10}{9} = 780\ \text{Garben Ertrag,}$$

und der Zehend betrug 78 Garben.

III. Es wurde ein Garten gekauft und wieder verkauft, aber letzteres mit einem Verluste von 18 Prozent; nämlich er wurde mit 7298 fl. bezahlt. Welches war der erste Kaufpreis des Gartens?

Auflösung.

Der Garten wurde gekauft um 100 fl. } Num. falsi.
verkauft um 100 — 18 = 82 fl. }

Verk. Verk. Ank. Ank.

$$82 : 7298 = 100 : x\ \text{fl.}$$

$x = \frac{729800}{82} = 8900$ fl. der Werth des Gartens beim ersten Ankaufe.

IV. Wie groß muß ein Kapital seyn, welches mit Einschluß seiner dreijährigen $4\frac{1}{3}$ prozent. Zinsen 7797 fl. beträgt?

Auflösung. Das Kapital sey = 100 fl., so sind die dreijährigen Zinsen $\frac{13}{3} \times 3 = 13$ fl.; folglich Kapital und Zins = 113 fl.

K. u. Z.		K. u. Z.		K.		K.
113	:	7797	=	100	:	x

$$x = \frac{779700}{113} = 6900 \text{ fl. Kapital.}$$

V. Von einer Zahl beträgt die Hälfte, der vierte und zwölfte Theil zusammen 170; wie heißt die Zahl selbst?

Auflösung. Die Zahl sey 120, so ist die Hälfte = 60, der vierte Theil = 30, der zwölfte Theil = 10, deren Summe = 100.

$$100 : 120 = 170 : x$$
$$5 : 6 = 170 : x$$
$$1 : 6 = 34 : x = 204.$$

VI. Es sollen 600 fl. unter 4 Personen so vertheilt werden, daß B die Hälfte vom Antheile des A, C $\frac{1}{5}$ weniger als B, und D $\frac{5}{6}$ vom Antheile des C erhalte. Wie viel erhält ein jeder?

Auflösung. A erhalte 120 fl., so bekommt B 60 fl., C 48 fl. und D 40 fl., alle vier zusammen erhalten also 268 fl.

$$268 : 120 = 600 : x$$
$$67 : 30 = 600 : x = \frac{18000}{67} = 268\tfrac{44}{67} \text{ fl. Antheil des A.}$$
$$268\tfrac{44}{67} \times \tfrac{1}{2} = 134\tfrac{22}{67} \text{ fl. — — — B.}$$
$$134\tfrac{22}{67} \times \tfrac{4}{5} = \tfrac{9000}{67} \times \tfrac{4}{5} = 107\tfrac{31}{67} \text{ fl. — — — C.}$$
$$107\tfrac{31}{67} \times \tfrac{5}{6} = \tfrac{7200}{67} \times \tfrac{5}{6} = 89\tfrac{37}{67} \text{ fl. — — — D.}$$
$$600 \text{ fl.}$$

Anmerkung. Solche Aufgaben werden leichter durch Gleichungen gelöset.

F. Proportionen nach dem Reesischen Ansatze.

§. 126.

Die Reesische Regel, deren Erfindung dem Herrn van Rees, einem Holländer, zugeschrieben wird, unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Regel de Tri-Ansatze dadurch, daß die äußeren Glieder der Proportion auf die linke, die mittleren Glieder auf

die rechte Seite eines senkrechten Strichs untereinander, folglich als Faktoren eines Produktes (§. 106.) zu stehen kommen.

§. 127.

Hier lassen sich nun wieder die bekannten drei Momente unterscheiden.

I. Die Formation oder der Ansatz.

Das unbekannte Glied x steht allezeit auf der linken Hälfte zu oberst; das Frageglied, wenn das Verhältniß ein gerades ist, auf der rechten, ist das Verhältniß ein verkehrtes, auf der linken Seite. Die mit diesen Gliedern gleichbenannten Zahlen, welche im andern Theile der Aufgabe vorkommen, müssen immer auf die entgegengesetzte Seite gesetzt werden.

Z. B. I. Wie viele Gulden kosten 12 Ellen, wenn 5 Ellen 20 fl. kosten?

fl. x	12 Ellen
E. 5	20 fl.

II. Wie viele Tage werden 20 Personen mit der nämlichen Quantität Lebensmitteln ausreichen, welche 6 Personen auf 10 Tage hinreicht?

T. x	10 T.
P. 20	6 P.

Bei geraden Proportionen steht jeder Ursache die entsprechende Wirkung gegenüber. Bei zusammengesetzten Proportionen müssen die zusammengehörigen Wirkungen und Ursachen, nach der Tabelle §. 122., oder die unter sich im verkehrten Verhältnisse stehenden Größen jedesmal auch als Faktoren eines Produktes zusammengeschrieben werden. Z. B. Einen Graben herzustellen, welcher 9 Ellen tief, 20 breit und 80 lang ist, brauchen 30 Taglöhner, wenn sie des Tages 9 Stunden arbeiten, 60 Tage. Wie viele Taglöhner werden erfordert, um einen Graben von 12 Ellen Tiefe, 50 Breite, 400 Länge, wenn sie des Tages 12 Stunden arbeiten, in 24 Tagen fertig zu machen?

	E. t.	E. br.	E. l.	Arb.	T.	St.
Bedingungszahlen:	9	20	80	30	60	9
Fragezahlen:	12	50	400	x	24	12

Arb.	x	12	Tiefe
Tag.	24	50	Breite
St.	12	400	Länge
Tiefe	9	30	Arb.
Breite	20	60	Tage
Länge	80	9	St.

Anmerkung. Die eine Hälfte muß genau eben so viele und zwar gleichartige Glieder enthalten, als die andere Hälfte.

II. Reduktion.

Man stelle vor Allem zwischen den homologen Gliedern der beiden Hälften die strengste Gleichartigkeit her, welches am Füglichsten durch den Kettensatz geschehen kann, indem man nach Erforderniß der Umstände, Ergänzungs-Verhältnisse aus den Tabellen zu Hülfe nimmt.

Z. B. Man habe die Aufgabe (§. 124.): Wie viele Bayerthaler kosten 6 Ballen Schreibpapier, wovon 2 Bogen 3 Heller gelten?

So ist der Ansatz nebst der Reduktion:

Bayerth.	x	6	Ballen
Ball.	1	10	Ries
Ries	1	20	Buch
Buch	1	24	Bogen
Bog.	2	3	Heller
Heller	8	1	kr.
kr.	60	1	fl.
fl.	$2\frac{2}{5}$	1	Bayerthaler.

III. Solution.

Da die linke Hälfte, wo x steht, das Produkt der äußeren, die rechte Hälfte aber das Produkt der inneren Glieder enthält, folglich jene den Divisor, diese das Dividend vorstellt; so multiplizire man sowohl alle Zahlen auf des Divisors, als auch auf des Dividends Seite in zwei eigene Produkte, und dividire das der letzteren Seite durch jenes der ersteren.

Im letzten Beispiele erhält man: 11.520 x = 432.000

$$x = \frac{432000}{11520} = 37\tfrac{1}{2} \text{ Bayerthaler.}$$

Ueber die Probe vgl. das am Ende des §. 115. Angeführte.

§. 128.

Abkürzung der Rechnung.

I. Man dividire oder verkleinere jeden schicklichen Faktor der einen Hälfte durch den der andern; oder suche für je zwei Faktoren einen gemeinschaftlichen Theiler.

II. Kommen auf einer Seite, oder auf beiden, Brüche vor, so versetze man die Nenner von der Divisor- auf die Dividend-Seite, und umgekehrt. Gemischte Zahlen müssen zuerst in einen uneigentlichen Bruch verwandelt werden.

III. Sind auch Dezimalbrüche als Faktoren gegeben, so mache man im Dividend und Divisor durch Anhängung von Nullen die Dezimalstellen gleich, oder verwandle sie durch Multiplikation mit 10, 100, 1000.... in Ganze.

§. 129.

Beispiele. (Vergl. Tabelle §. 122.)

I. Eine Lieferung von 100 Zuckerhüten, wovon einer 8 Pfund wog, kostete 880 fl.; was wird eine andere Lieferung von 50 kosten, jeden zu 11 Pfund?

Operation.		
	fl. x	5~~0~~ Zh.
	Zh. ~~100~~	11 Pf.
	Pf. ~~8~~	~~88~~~~0~~ fl.
	1	11

x = 605 fl.

II. In wie vielen Jahren kann ein Kapital von 9640 fl. zu $4\frac{3}{4}$ Prozent 1831 fl. 36 kr. Zins tragen?

Antwort. In 4 Jahren.

III. Wie groß muß ein Kapital seyn, dessen 7 prozent. Interessen jede Sekunde eines gemeinen Jahres $1\frac{1}{2}\frac{3}{7}\frac{1}{5}$ hl. abwerfen sollen?

Antwort. 1500000 fl.

IV. Zwei Schnitterinnen verdienen sich in 6 Tagen 4 fl. 48 kr.; wie viele Gulden können sich 15 Schnitterinnen in 30 Tagen verdienen?

Antwort. 180 fl.

V. Mit einem gewissen Vorrathe von Futter können 5 Pferde $1\frac{1}{2}$ Monate unterhalten werden; wie lange wird ein nochmal so großer Vorrath für den Unterhalt von 12 Pferden erklecklich seyn?

Operation.

Mon. x	2 Vorr.
Pf. 12	$1\frac{1}{2}$ Mon.
Vorr. 1	5 Pf.
4.2	3

$x = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ Monat.

VI. Ein Fuhrmann begehrte, um 30 Eimer 20 Meilen weit zu führen, 100 fl. Ein anderes Mal sollte er 70 Eimer 30 Meilen weit liefern; weil aber die Wege sehr schlecht waren, erhöhte er das Frachtlohn um den 4ten Theil des vorigen Betrages (für den Eimer). Wie viel mußte ihm bezahlt werden?

Operation.

fl. x	70 Eimer
Eimer 30	30 Meilen
Meilen 20	$\frac{5}{4}$ Fracht.
Fracht. 1	100 fl.
4	

$x = \frac{875}{2} = 437$ fl. 30 kr.

VII. Wenn das Viertel Korn 2 fl. 24 kr. gilt, soll ein 9 Kreuzer Laib 5 Pfd. schwer seyn: welches Gewicht muß ein Brod der nämlichen Qualität um 20 kr. haben, wenn das Viertel Korn 7 fl. kostet?

Operation.

Pf. x	20 kr.
fl. 7	5 Pf.
kr. 9	$2\frac{2}{5}$ fl.
3.5	12.4

$x = \frac{80}{21} = 3$ Pf. 24 Loth 3 Quent. beinahe.

VIII. Ein Weber lieferte von 260 Strähnen Garns 190 Ellen Leinwand, $\frac{5}{4}$ breit; ein anderes Mal von 520 Strähnen 570 Ellen. Wie breit war diese Leinwand?

Antwort. $\frac{5}{6}$ Ellen breit.

IX. Ein Getreidkasten, welcher 48 Fuß lang und 30 breit ist, faßt 120 Schäffel Getreid, wenn man dieses 9 Zoll (Duodec. Maß) hoch aufschüttet. Wie viele Schäffel würde ein anderer Getreidkasten fassen, welcher 52 Fuß lang, 36 breit ist, und worin das Getreide $1\frac{1}{2}$ Fuß hoch liegt?

Antwort. 312 Schäffel.

X. Wie viele bayerische Klafter gibt (bei gesetzlicher Scheiterlänge) ein Holzstoß, welcher 96 Fuß lang und 12 Fuß hoch ist?

Antwort. 32 Klafter.

XI. Ein bayerischer Kaufmann erhält aus Hamburg eine Lieferung von 2 Zentner 76 Pf. (Hamb. Gew.) um 151 Mark Banco 8 Schilling. Wie hoch kommt 1 bayer. Pfund nach bayer. Währung, die Mark Banco zu 54 kr. gerechnet?

XII. Jemand zählt von der Erscheinung des Blitzes bis zu dem Augenblicke, da er den Donner hört, 30 Sekunden. Wie viele bayerische Chausséestunden ist das Gewitter entfernt, wenn der Puls jener Person in 1 Minute 75 Schläge macht, und man als mittlere Geschwindigkeit 1040 Pariser Fuß für 1 Sekunde rechnet?

Auflösung. Nach den angehängten metrologischen Tafeln sind 100 Pariser Fuß = 111,3 bayer. Fuß und 12703 bayer. Fuß = 1 Chausséestunde. Daher

bayer. Chst. x	30 Pulsschl.
75	60 Sek.
1	1040 Par. Fuß
100	111,3 bayer. Fuß
12703	1 bayer. Chst.

x = 2,187 b. Chst.

XIII. Wie viele sächsische Groschen kosten 114 Leipziger Pfund Kaffee, wenn 5 Hamburger Pf. 48 Schilling kosten, da 16 Sch. = 1 Mark, 57 M. = 4 Louisdor, 9 L. = 16 Dukaten, 18 Duk. = 55 sächs. Thlr., 1 s. Thlr. = 24 Groschen, und da 23 Hamb. Pf. = 20 bayer. Pf., 24 Leipz. Pf. = 20 bayer. Pf.?

XIV. Ein Hamburger Kaufmann hat von einem Madrider Handlungshause 11430 Realen de vellon zu fordern. Wie viel Hamburger Mark Banco beträgt dieß, wenn 32 Realen de vellon zu 17 Realen de plata, eine solche zu 34 Maravedis, 375 Marav. zu 1 Duk. de Cambio, 1 solcher zu 45 Schilling und 16 Schilling zu 1 Mk. Bco. gerechnet wird?

Antwort. 1548 Mark 6 Schilling.

XV. Ein Springbrunnen hat 6 gleich große Röhrchen; aus einem derselben laufen in 2½ Minuten 5 Maß Wasser. Wie viele Stunden müssen alle 6 zugleich laufen, bis sie ein unterhalb befindliches Behältniß anfüllen, das 430 c′ hält, da 43 c″ dc. = 1 bayer. Maß ist?

St. x	430 c′
R. 6	2½ Min.
Maß 5	1 R.
1 c′	1000 c″
43 c″	1 Maß
Min. 60	1 St.

x = $59\frac{1}{18}$ Stunden.

§. 130.

Aufgabe. Duodezimalmaß in Dezimalmaß, und umgekehrt zu verwandeln.

Auflösung. I. Wenn von dem Dezimal- und Duodezimal-Maße des nämlichen Landes die Rede ist, so nimmt man die Verhältnisse zu Hülfe.

1) Für das Längenmaß ist bei einerlei Fußmaß:

1 Fuß dd.	=	1 Fuß dc.
$\frac{1}{12}$ Ruthe dd.	=	$\frac{1}{10}$ Ruthe dc.
12 Zolle dd.	=	10 Zolle dc.
144 Lin. dd.	=	100 Lin. dc.

2) Für das Flächenmaß:

1 □ Fuß dd.	=	1 □ Fuß dc.
$\frac{1}{144}$ □ Ruthe dd.	=	$\frac{1}{100}$ □ Ruthe dc.
144 □ Zoll dd.	=	100 □ Zoll dc.
20.736 □ Lin. dd.	=	10000 □ Lin. dc.

3) Für das Körpermaß:

1 Kubf. dd.	=	1 Kubf. dc.
$\frac{1}{1728}$ Kub. R. dd.	=	$\frac{1}{1000}$ Kub. R. dc.
1728 Kubz. dd.	=	1000 Kubz. dc.

Beispiel. Die bayerische Maßkanne hält genau 43 bayerische Dezimal-Kubikzoll. Wie viel Duodez.-Kubikzoll des bayerischen Maß beträgt dieses?

Operation.

dd. x	43 dc.
dc. 1000	1728 dd.

x = 74,304 dd. Kbz.

Anmerkung. Vergl. über diese einfachen Reduktionen §. 79.

II. Ist aber das Dezimalmaß des einen Landes in das Duodezimalmaß des andern Landes zu verwandeln, so muß man außer obigen Verhältnissen auch noch das Verhält-

niß des Längen-, Quadrat- oder Kubikfußes dieser Länder zu Hülfe nehmen, je nachdem eines von diesen drei Maßen zu reduziren ist. Bei dem Flächenmaße muß man die Verhältnißzahlen einmal, bei dem Körpermaße zweimal mit sich selbst multipliziren; (im ersten Falle zum Quadrat, im zweiten zum Kubus erheben.) Vergl. §. 120. VI.

Beispiele. Wie viel bayerische Duodezimalquadratruthen machen 146 franz. Dez. □ Ruthen?

Auflösung. 1 fr. R. : 1 b. R. = 324 : 292 = 81 : 73; 73 fr. R. = 81 b. R., also 73.73 fr. □ R. = 81.81 b. □ R.

b. Dbz. □ R. x	~~146~~ fr. Dbz. □ R.
Dz. □ R. $\frac{1}{~~100~~}$	$\frac{1}{~~144~~}$ Dbz. □ R.
fr. ~~73~~.73	~~81~~.81 b.
~~144~~	100
~~16~~	~~2~~
8	9

$$x = \frac{81.9.100}{73.8} = 124\frac{121}{146} \text{ b. Dbz. □ R.}$$

Anmerkung. Die neueren französischen Mathematiker haben auch bei der Eintheilung des Kreises das Dezimalmaß eingeführt, und die Kreisperipherie (anstatt in 360 Grade, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden u. s. w.), in 400 Grade, den Grad in 100 Minuten, die Minute in 100 Sekunden, die Sekunde in 100 Tertien u. s. w. eingetheilt; — daher sind

360° alte	=	400° neuen
9° —	=	10° —
$27'$ —	=	$50'$ —
$81''$ —	=	$250''$ —
$243'''$ —	=	$1250'''$ — u. s. w.

Aufgabe. Ein Zirkelbogen von $95^\circ, 24', 48'', 50'''$ gewöhnlichen Maßes soll in das neue französische übergetragen werden.

Operation. $95^\circ, 24', 48'', 50''' = 20'609.330'''$

N. fr. x'''	20'609.330 alt fr.
Alte — 243	1250 neu fr.

$$x = \frac{25761662500}{243} = 106^\circ, 01', 50'', 72'''.$$

Kürzer könnte man sagen 90° alt fr. = 100° neu fr.

$$5^\circ, 24', 48'', 50''' = 1'169.330'''$$

$$x = \frac{1'169.330}{243} = 6^\circ, 01', 50'', 72''' \text{ neu franz.}$$

$$100^\circ + 6^\circ = 106^\circ \text{ u. s. w.}$$

G. Handelsrechnungen nach Prozenten.

§. 131.

In vielen Rechnungsaufgaben, namentlich Handelsrechnungen, muß ein vermittelndes Verhältniß nach Prozenten angenommen werden, d. i. es muß 100 um einige (z. B. 6) Einheiten vermehrt oder vermindert, und dann das Verhältniß: 100 zu der so vermehrten oder verminderten Zahl (100 : 106 oder 100 : 94) gesetzt werden. Ersteres Verhältniß heißt (6) auf hundert, letzteres (6) von hundert. Zu diesen Aufgaben gehört die Gewinn-, Verlust-, Tara-, Fusti-, Gutgewicht-, Rabatt-, Diskonto-, Agio- rc. Rechnung, zum Theil die Wechselreduktionen.

Die meisten Prozentrechnungen beziehen sich auf Waarenrechnung, d. i. auf Berechnung des Werthes einer Partie oder des Verkaufspreises. Die letzteren heißt man häufig Waaren-Kalkulationen oder Kalkulaturen.

§. 132.

I. Gewinn und Verlust.

Gewinn und Verlust für das Ganze und für ein Stück werden durch die Stammrechnungsarten berechnet. Vergl. §. 44. I. u. II. Bei Berechnung nach Prozenten ist häufig die Zeit zu berücksichtigen, innerhalb welcher sich ein auf den Ankauf einer Waare verwendetes Kapital verinteressiren soll. Dabei muß auch bemerkt werden, ob der Einkauf und Verkauf immer nach dem nämlichen Maßstabe, d. h. in einerlei oder verschiedenem Ellen- oder Gewichtmaße gemacht wurde, oder nicht.

Beispiele. I. Ein Handelsmann mußte eine Quantität Zucker mit 4 p. c. Verlust verkaufen, er konnte nämlich für 5 ℔ nur 3 fl. lösen. Was hatte er beim Einkaufe für 1 ℔ gegeben?

Auflösung. Einkauf fl. x	1 ℔
℔ 5	3 fl. Verkauf
Verkauf fl. 96	100 fl. Einkauf

$x = \frac{5}{8}$ fl.

II. Wie theuer mußte ein bayerischer Kaufmann die bayerische Elle Tuchs verkaufen, wenn er 100 Regensburger Ellen um 750 fl. kaufte, und 8 p. c. gewinnen wollte?

Auflösung. Man nehme das Verhältniß zu Hülfe:

1000 bayer. Ellen = 1028,36 Regensburger

Verkauf fl. x	1 bayer. Elle
Reg. Ellen 100	750 fl. Einkauf
bayer. Ellen 1000	1028,36 Reg. Ellen
Einkauf fl. 100	108 fl. Verkaufspreis.

$$x = \frac{1 \times 1028{,}36 \times 750 \times 108}{10000.000} = 8 \text{ fl. } 20 \text{ kr. beinahe.}$$

III. Ein Kaufmann bezahlte 18 Ztr. Kaffee mit 1200 fl.; er verschließ sie aber in 6 Monaten, das Pfund um 50 kr. Wie viel kann er auf solche Weise am Hundert gewinnen?

Auflösung. Er verkaufte also 18 Ztr. um 1500 fl.

Gewinn 1500 — 1200 = 300 fl.

Gewinn fl. x	100 Ausl.
Ausl. 1200	12 Mon.
Mon. 6	300 fl. Gewinn.

x = 50 Prozent jährlich.

IV. Man verkauft eine Waare mit 5 % Gewinn um $7\frac{1}{2}$ fl.; wie theuer müßte sie gegeben werden, wenn dabei 8 % gewonnen werden sollte? Wie hoch kommt sie im Ankaufe?

a) $105 : 7\frac{1}{2} = 108 : x = 7\frac{5}{7}$ fl.

b) $105 : 7\frac{1}{2} = 100 : x = 7\frac{1}{7}$ fl.

§. 133.

II. Tara.

Tara heißt bei Kaufleuten das Gewicht der Fässer, Kisten und anderer Umschläge, welche sammt der Waare gewogen werden müssen. Sie heißt Netto-Tara, wenn das Gewicht der Emballage (Verpackung) bei dem Verkaufe wirklich ermittelt wird; Uso-Tara, wenn sie vom Gebrauch bestimmt ist. Das Gewicht der Waare allein heißt Netto-Gewicht, das Gewicht der Waare in und mit der Verpackung Brutto- oder Sporko-Gewicht.

Die Tara wird nach einem bestimmten Gewichte oder nach Prozenten vom (selten auf) Hundert angegeben, je nachdem die

Waare ohne oder nur mit der Verpackung gewogen werden kann. Im ersten Falle wird das Netto-Gewicht einfach dadurch bestimmt, daß man vom Brutto-Gewicht die Tara abzieht.

Beispiel. Ein Kaufmann erhielt vier Kisten Wismuth, den Zentner netto um 25 fl. Das Gewicht der Waare brutto ist $15\frac{3}{4}$ Ztr. Nachdem die Kisten ausgeleert waren, fand man, daß die erste $6\frac{3}{4}$, die zweite $7\frac{1}{2}$, die dritte 8, die vierte $9\frac{3}{4}$ Pfund wog. Wie viel hat der Kaufmann netto zu zahlen?

Auflösung. Tara = 32 Pfunde.

Brutto-Waare = 1500 + 75 Pfd. = 1575 Pfd.

Netto 1575 — 32 = 1543 Pfd.

fl. x	1543 Pfd. netto.
Netto-Pfd. 100	25 fl.

x = 385 fl. 45 kr. netto.

Im zweiten Falle, da nämlich die Tara vom Hundert bestimmt wird, kommt das Ausgleichungsverhältniß: 100 Pfund brutto = (100 — Tara) Pfund netto in Rechnung, so daß der Nettopreis nach folgendem Ansatze berechnet wird:

fl. x	n Pfd. brutto
br. Pfd. 100	(100 — T.) netto
n. Pfd. m	p fl.

Beispiel. Was kosten 120 Pfd. brutto, wenn 7 Pfd. netto 2 fl. 30 kr. kosten, und 9 Pfd. Tara vom Hundert (oder vom Zentner) bedungen sind?

fl. x	120 Pfd. brutto
br. Pfd. 100	91 Pfd. netto
n. Pfd. 7	$2\frac{1}{2}$ fl.

x = 39 fl.

Anmerkung. Die in Prozenten ausgedrückte Tara wird fast immer vom Hundert berechnet, weil sie in dieser Art für den Kaüfer vortheilhafter ist. Wären aber z. B. 9 Pfund Tara auf Hundert bedungen, so wäre das Ausgleichungsverhältniß: 109 Pfund brutto = 100 Pfund netto.

§. 134.

III. Fusti, Gutgewicht.

Werden Waaren auf dem Transporte beschädigt, oder finden sich außerdem bei einer Lieferung Waaren von minderer Güte (Ausschuß), so muß sich der Verkaüfer einen Abzug gefallen lassen,

welchen man Fusti nennt. Ist dabei die Zahl der Pfunde ꝛc. Fusti bestimmt, so wird die Quantität und der Preis der guten Waare nach den Stammrechnungsarten bestimmt, der Preis des Fusti wird dabei gewöhnlich niedriger angesetzt. Bei Bestimmung des Fusti nach Prozent kommt der Werth von diesem in der Regel nicht in Anschlag.

Gutgewicht (Sopratara, Besemschon) ist der Abzug, welchen auf manchen Handelsplätzen bei Bezahlung einer größeren Waarenlieferung der Großhändler dem Krämer in der Art gestattet, daß dieser die Zahlung für eine kleinere Waarenmenge zu machen hat, als er wirklich empfängt.

Beispiel. Ein Krämer erhielt 135 Pfd. um 180 fl., Fusti 8 p. c., Gutgewicht 1 p. c. Wie theuer muß er 1 Pfd. geben, wenn er 8 p. c. gewinnen will?

Einnahme x	1 Pfd.
Pfd. 135	180 fl. Auslage.
wegen Fusti Pfd. 92	100 Pfd. wirkl. Gewichts.
wegen Gutgew. 99	100 Pfd.
Auslage fl. 100	108 fl. Einnahme.

x = 1 fl. 35 kr. beinahe.

§. 135.
IV. Spesen.

Auslagen auf Transport, Zölle, Besorgung (Commission, Provision, Courtage) ꝛc. der Waaren heißen Spesen. Die Einkaufsspesen werden auf Hundert berechnet, weil sie den Preis der Waare erhöhen; die Verkaufsspesen von Hundert, weil sie die Einnahme vermindern.

Beispiel. Wie viel Pfund Sterling (zu 12 fl.) kosten 1000 englische Pfd. brutto, wenn 1 bayer. Pfd. netto (in London ohne Spesen) auf 1 fl. 12 kr. zu stehen gekommen? 8 Pfd. Tara vom Zentner, 20 p. c. Spesen incl. Fracht, 10 p. c. Fusti; 1000 bayer. Pfd. = 822 engl. Pfd.

Ausgabe Lst. x	1000 engl. Pfd. brutto
netto bayer. Pfd. 1	$1\frac{1}{5}$ fl.
fl. 12	1 Lst.
engl. Pf. 822	1000 bayer. Pfd.
brutto Pfd. 100	92 Pfd. netto
Waarenpreis fl. 100	120 fl. Waarenpreis f. Spesen
Pfd. 100	90 Pfd. wegen Fusti

x = $120\frac{120}{137}$ Lst.

§. 136.

§. 136.

V. Rabatt, Diskonto, Agio.

A. **Rabatt** ist jeder, meistens nach Prozenten berechnete Abzug, welchen ein Verkaüfer seinem Kaüfer entweder als eine Vergütung für frühere oder baare (kontante) Zahlung, oder als besonderen, haüfig nur scheinbaren Vortheil gibt. Einen wirklichen Vortheil gewährt er, wenn er für frühere Zahlung gegeben wird, in welchem Falle er auch **Diskonto** oder **Skonto** heißt, oder wenn er ausnahmsweise gestattet wird; in beiden Fällen wird er **vom** Hundert berechnet. Der Rabatt gibt einen nur scheinbaren Vortheil, wenn er in gewissen Fällen immer gewährt wird, oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, zur Usanz geworden ist, indem er dann vorher zu dem betreffenden Werthe geschlagen worden ist; in diesem Falle wird er gewöhnlich **auf** Hundert gerechnet.

Insbesondere wird der Rabatt vom **Verlagsbuchhändler** dem Sortimentsbuchhändler auf den s. g. **Laden**- oder **ordinären Preis** der Bücher, nach 10 bis $33\frac{1}{3}$ %, haüfig auch vom letzteren dem Abnehmer gewährt, und in beiden Fällen **vom** Hundert berechnet. Der Preis eines Buches, nach Abzug des Rabattes, heißt **Netto-Preis**.

Zu dem usanzmäßigen Rabatt gehört ferner:

a) Die **Leipziger Meßzahlung**, nach welcher der Großhändler die Geldsorten, worin die Zahlungen gewöhnlich geleistet werden, um $3\frac{1}{3}$,10 ... p. c. höher rechnet, so daß z. B. 100 Thlr. preuß. Cour. = 110 Thlr. M. Z. gerechnet werden.

b) Der in Hamburg übliche **Dekort**, welcher bei Waarenverkaüfen im Großen als eine Vergütung für Baarbezahlung gewährt und **vom** Hundert berechnet wird.

Beispiele. I. Es sollen nach einiger Zeit 840 fl. bezahlt werden; bei kontanter Zahlung darf der Schuldner 4 % Rabatt rechnen. Wie viel hat er sogleich zu bezahlen?

100 fl. wirkl. Schuld : 840 fl. w. Sch. = 96 kont. : x = 806 fl. 24 kr.

Diskonto 840 fl. — 806 fl. 24 kr. = 33 fl. 36 kr.

II. Eine Buchhändler-Rechnung betrug nach Abzug von $33\frac{1}{3}$ % Rabatt 150 Thlr. 15 Ngr.; wie groß war sie früher?

$100 - 33\frac{1}{3} = 66\frac{2}{3}$

$66\frac{2}{3} : 150\frac{1}{2} = 100 : x = 225\frac{3}{4}$ Thlr.

III. Ein Kaufmann soll von einer Waare, welche er nur um 40 fl. geben kann, 5 % Rabatt gewähren; wie muß er den Preis stellen, den Rabatt auf Hundert gerechnet?

$100 : 105 = 40 : x = 42$ fl.

IV. Wenn von einem Buche der Ladenpreis 2 fl., der Nettopreis 1 fl. 48 kr. ist; wie viel Prozent Rabatt werden gerechnet?

2 fl. ord. : 100 fl. ord. $= 1\frac{4}{5}$ fl. n. : $x = 90$ fl. netto.

Also $100 - 90 = 10$ % Rabatt.

B. Werden bessere Münzen gegen schlechtere verwechselt, so heißt das, was auf die schlechtere zugelegt werden muß, Agio, was von der bessern abgezogen werden darf, Diskonto. Wird eine Geldsorte gegen eine andere mit Beibehaltung des beiderseitigen Werthes verwechselt, so gebraucht man dafür den Ausdruck pari.

Beispiel. Es sollen 300 fl. in Karolins mit 6 p.c. Agio gegen Kronenthaler verwechselt werden.

in Kronenthlr. fl. x	300 fl. in Karol.
in Karol. fl. 100	106 fl. in Krthlr.

x = 318 fl. in Krthlr., Agio 18 fl.

§. 137.

VI. Wechselreduktionen.

Unter Wechsel versteht man eine auf eine gewisse Geldsumme lautende Verschreibung, worin ausdrücklich das Wort Wechsel vorkommt. Der Wechsel kann auch Gegenstand des Handels werden, in wieferne dadurch nicht bloß die Uebersendung einer baaren Geldsumme ersetzt, sondern auch auf einen Gewinn am Wechselkourse spekulirt wird. Wechselkours ist aber die Angabe der veränderlichen Geldsumme, welche für eine bestimmte feste Summe in einer andern Valuta (einem andern Werthe), an einem andern Orte oder später zahlbar, gegeben wird. Die Wechselkourse werden an den Börsen bestimmt und in den Kourszetteln in der Art bekannt gemacht, daß sie theils in der mit Geld (= gesucht), theils in der mit Brief (= angeboten) überschriebenen Spalte stehen: der Wechsel-Suchende wird solche etwas höher bezahlen und der Anbietende etwas weniger erhalten, als der eigentliche Kours ist. Kann der Käufer den Wechsel nicht sogleich oder in längstens 14 Tagen (in kurzer Sicht), sondern erst später (nach 1, 2, 3 Monaten) einlösen, so wird er weniger dafür bezahlen; es muß sich der Verkäufer einen

Abzug, Diskonto genannt, gefallen lassen. Von den verschiedenen Wechselrechnungen (Parirechnung, Wechselreduktionen, Arbitragerechnung, Wechselkommissionen) werden hier nur die Wechselreduktionen näher betrachtet.

Wechselreduktion ist die Verwandlung einer Wechselsumme nach einem gegebenen Kourse. Es gibt direkte oder einfache, und indirekte oder zusammengesetzte Wechselreduktionen, je nachdem die Kourse zweier Plätze unmittelbar oder mittelst eines dritten Platzes miteinander verglichen werden. Sie werden mittelst Proportionen oder der Kettenrechnung berechnet. Läßt man bei den indirekten Wechselreduktionen durch den Mittelplatz trassiren (verkaufen) oder remittiren (einkaufen), so hat man haüfig auch Spesen zu bezahlen.

Bei allen Wechselreduktionen muß man mit den Koursen aus den Kourszetteln, besonders mit den festen Valuten, welche nicht immer aus den Kourszetteln zu entnehmen sind (z. B. bei den Augsburger und Hamburger Kourszetteln), bekannt seyn. Die feste Valuta kann theils im Inlande, theils im Auslande seyn. Bei den Augsburger Wechselkoursen ist die feste Valuta auswärts, und zwar: Amsterdam 100 fl. holländ. Cour.; in Hamburg 100 Mark Banko; in Paris, Lyon und Marseille 300 Franks; in Nürnberg, Wien und Triest 100 fl. in 20 fl.-Fuß; in Frankfurt 100 fl. in 24 fl.-Fuß; in London 1 Pfund Sterling. In Augsburg ist feste Valuta in fl.-Cour. (im 20 fl.-Fuß) für Genua, Livorno, Venedig: 20 für x Lire; für Leipzig und Berlin: 150 für x Reichsthaler. — Auf den neuern Frankfurter und Leipziger (Berliner) Wechselkourszetteln sind immer feste und veränderliche Valuta angegeben. Auf den Hamburger Wechselkourszetteln ist, wie auf den Augsburgern eine feste Valuta nicht angegeben, und diese ebenfalls bald im In-, bald im Auslande.

Beispiele.

I. Was bezahlt man in Augsburg für 3000 Franks in kurzsichtigen Wechseln auf Paris à $117\frac{1}{4}$?

Operation. 300 Fr. : 3000 Fr. $= 117\frac{1}{4}$ fl. : x fl.

$$x = 1172\tfrac{1}{2} \text{ fl.}$$

II. Was betragen in Hamburg 450 Pf. Sterling in Wechseln auf London, wenn der Wechselkours 13 . $7\frac{1}{2}$, d. i. 13 Mark $7\frac{1}{2}$ Schilling Banko für 1 Pf. Sterl. ist?

Operation. 1 Pf. St. : 450 Pf. St. = 13 Mk. $7\frac{1}{2}$ Sch. : x
1 : 450 = $215\frac{1}{2}$ Sch. : x = 96975 Sch. = 6060 Mk. 15 Sch.

III. Was betragen 300 fl. (im 24 fl.=Fuß) in Frankfurt a. M. in Wechseln auf Leipzig, wenn der Wechselkours 60 Thlr. = $104\frac{5}{8}$ fl. ist?

Operation. $104\frac{5}{8}$ fl. : 300 fl. = 60 Thlr. : x Thlr.
x = $172\frac{4}{93}$ Thlr. = 172 Thlr. 1 Gr. 3 pf. (nahe zu).

IV. (Indirekte Wechselreduktion.) Ein Kaufmann in Nürnberg bezahlt 900 Mark Banko über Leipzig nach Hamburg. Wie hoch kommen sie ihm, wenn der Kours auf Leipzig in Nürnburg 105 (d. i. 105 kr. im 24 fl.=Fuß = 1 Thlr.) und der Kours auf Hamburg in Leipzig $149\frac{1}{4}$ (d. i. 300 Mk. Bko. = $149\frac{1}{4}$ Thlr.) ist?

Operation.		
	fl. x	900 Mk. Bko.
	Mk. 300	$149\frac{1}{4}$ Thlr.
	Thlr. 1	105 kr.
	Kr. 60	1 fl.

x = 784 fl.

V. (Indirekte Wechselreduktion mit Spesen.) London kauft für Rechnung Hamburg 24000 Silberrubel auf Petersburg à $36\frac{2}{3}$ (d. i. 1 S. R. = $36\frac{2}{3}$ Pences oder Deniers), und trassirt dagegen auf Hamburg à 13.14 (d. i. 13 Mk. 14 Sch. = $13\frac{7}{8}$ Mk. = 1 Pf. Sterl. = 240 Pences), unter Berechnung von $\frac{2}{3}$ % Spesen. Wie viel Mark sind zu verrechnen?

Mk. x	24000 S. R.
S. R. 1	$36\frac{2}{3}$ d.
d. 240	$13\frac{7}{8}$ Mk.
Mk. 100	$100\frac{2}{3}$ M. mit Spesen.

x = $51214\frac{1}{6}$ Mk.

II. Division in proportionirte Theile.

§. 138.

I. Die Division eines Ganzen in proportionirte Theile geschieht nach der Proportion: Es verhält sich die Summe der Verhältnißzahlen zu dem zu theilenden Ganzen, wie jede einzelne Verhältnißzahl zu dem ihr entsprechenden Theile. (Vergl. §. 112.)

Z. B. Man theile 1000 fl. in vier Theile, welche sich verhalten wie: 2, 5, 6, 7.

Operation. 2 + 5 + 6 + 7 = 20 = s. S. = 1000.

$$\text{Also } \not{2}\not{0} : \not{1}\not{0}\not{0}\not{0} = \left\{\begin{array}{l} 2 : v \\ 5 : x \\ 6 : y \\ 7 : z \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} v = 100 \\ x = 250 \\ y = 300 \\ z = 350 \end{array}$$
$$1 : 50$$

Es muß also die Proportion so oftmal wiederholt werden, als Verhältnißzahlen gegeben sind. Bringt man das erste Glied auf 1, so verwandelt sich die Rechnung in eine bloße Multiplikation. Offenbar gewinnt dadurch der Kalkul, selbst in dem Falle, wo das erste Glied im zweiten nicht ohne Bruch enthalten ist, wenn man nur mit dem Quotus, welcher gewöhnlich eine gemischte Zahl wird, die Multiplikation durch die Verhältnißzahlen so vornimmt, daß die Ganzen und die Brüche eigens multiplizirt werden.

Z. B. Es sey das zu vertheilende Ganze 1259 fl., die Verhältnißzahlen: 2, 5, 6.

Operation. $2 + 5 + 6 = 13 = s$, S. $= 1259$.

$$\begin{array}{r} \not{1}\not{3} : \not{1}\not{2}\not{5}\not{9} = \\ 1 : 96\tfrac{11}{13} = \end{array} \left\{\begin{array}{l} 2 : x \\ 5 : y \\ 6 : z \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} x = 192\tfrac{22}{13} = 193\tfrac{9}{13} \\ y = 480\tfrac{55}{13} = 484\tfrac{3}{13} \\ z = 576\tfrac{66}{13} = 581\tfrac{1}{13}. \end{array}$$

II. Steht das zu vertheilende Ganze mit den Verhältnißzahlen in verkehrtem Verhältnisse, so muß man diese nach §. 115. c) vor der Addition als Nenner von Brüchen darstellen, deren Zähler 1 ist. Solche Aufgaben kommen aber im bürgerlichen Leben nicht häufig vor.

Z. B. Es sollen 27 fl. unter 3 Mitschüler nach ihrem Vorrange im Fortgange vertheilt werden; es hat aber A den 3ten, B den 5ten, C den 15ten Fortgangsplatz erhalten. Wie viel gebührt jedem?

Operation. Summe der Verhältnißzahlen: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$

$$= \frac{5 + 3 + 1}{15} = \frac{9}{15}$$

$$\frac{9}{\not{1}\not{5}} : 27 = \frac{5}{\not{1}\not{5}} : x$$

$$\begin{array}{rl} 1 : 3 & = 5 : x = 15 \\ & = 3 : y = 9 \\ & = 1 : z = 3 \\ \hline & \qquad\qquad 27 \text{ fl.} \end{array}$$

III. Sind die äußeren Verhältnißzahlen nicht auf die nämlichen mittleren bezogen, so müssen sie vorher mittelst Proportionen darauf reduzirt werden.

Z. B. Vier Personen theilten einen Gewinn von 665 fl. in folgender Art unter sich: So oft A 1 fl. nahm, erhielt B 2 fl.; so oft B 3 fl. erhielt, nahm C 4 fl., und so oft C 5 fl. bekam, erhielt D 6 fl. Was traf nun auf jede Person?

Auflösung. Vorher wird a) die Aufgabe gelöst: Wenn dem Theile 3 von B der Theil 4 von C entspricht: welcher Theil von C entspricht dem Theile 2 von B?

$$\begin{matrix} B & & B & & C & & C \\ 3 & : & 2 & = & 4 & : & x = 2\tfrac{2}{3} \\ C & & C & & D & & D \end{matrix}$$

Eben so b) $5 : 2\tfrac{2}{3} = 6 : x = 3\tfrac{1}{5}$

c) Summe der Verhältnißzahlen $1 + 2 + 2\tfrac{2}{3} + 3\tfrac{1}{5} = 8\tfrac{13}{15}$

d) $8\tfrac{13}{15} : 665 = 1 : x = 75$ fl.

$= 2 : y = 150$

$= 2\tfrac{2}{3} : z = 200$

$= 3\tfrac{1}{5} : u = 240.$

§. 139.

Um die Probe zu machen, muß man zeigen, daß die einzelnen Verhältnißzahlen zu den ihnen entsprechenden Theilen das nämliche Verhältniß haben, als die Summe der ersteren zur Summe der letzteren; z. B. in der ersten Aufgabe (§. 138)

$2 : 100 = 5 : 250 = 6 : 300 = 7 : 350 = 20 : 1000;$

der Exponent von jedem Verhältnisse = 50.

Im gemeinen Leben begnügt man sich, zu zeigen, daß die Summe der gefundenen Theile dem Ganzen S gleich sey; wobei aber als richtig vorausgesetzt wird, daß man die wahren Verhältnißzahlen gewählt habe.

§. 140.

Die Division in verhältnißmäßige Theile hat im bürgerlichen Leben sehr viele Anwendung, wo immer ein Ganzes in ungleiche, aber verhältnißmäßige Theile getheilt werden soll, nach dem verschiedenen Einflusse oder Anspruche, welchen Dinge oder Personen auf das Ganze selbst haben. Z. B. Kaufleute, welche in Kompagnie stehen, müssen Gewinn und Verlust nach Maß der Einlagen theilen. Man nennt daher diese Rechnung

auch insgemein: Gesellschafts-, Bergwerks-, Repartitions-Rechnung.

Die hier vorkommenden Rechnungsbeispiele heißen einfach oder zusammengesetzt, je nachdem die Verhältnißzahlen selbst einfach oder zusammengesetzt sind.

Einfache Beispiele.

I. Es sollen 919 fl. 20 kr. unter vier alte Personen nach dem Verhältnisse ihres Alters vertheilt werden. A zählt 92, B 97, C 100, D 105 Jahre. Wie muß die Vertheilung geschehen?

Antwort. A erhält $214\frac{2}{3}$, B $226\frac{1}{3}$, C $233\frac{1}{3}$, D 245 fl.

II. Vier Bauern, wovon A $\frac{1}{2}$, B $\frac{3}{4}$, C 1, D $1\frac{1}{4}$ Hof hat, sollen nach Verhältniß ihrer Güter 560 fl. zahlen. Wie viel trifft einen Jeden aus ihnen?

Auflösung. Die Bruch-Verhältnißzahlen werden bequemer in ganze Zahlen aufgelöst.

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : 1 : 1\frac{1}{4} = \frac{2 : 3 : 4 : 5}{4} \text{ Summe } 14.$$

Also zahlt A 80, B 120, C 160, D 200 fl.

III. Ein Fuhrmann führte einem Kaufmann einmal 80, das anderemal 104, das drittemal 156 Ztr. den nämlichen Weg. Dafür erhielt er in Allem 566 fl. 40 kr. — Wie viel trifft davon auf jede Fuhr?

IV. Ein Eisenhammer lieferte an vier Kaufleute 48 Ztr. Eisen für 1010 fl.; davon nahm Kaufmann A 9, B 15, C 17, D 7 Ztr. Was hat Jeder zu bezahlen?

V. Vier Personen gewannen in der Lotterie 21 fl. A hatte 14, B 17, C 25, D 28 kr. eingelegt. — Wie müssen sie den Gewinn nach ihren Einlagen theilen?

Die Probe zur Uebung.

§. 141.

Werden die Verhältnißzahlen selbst durch das multiplikative Zusammenwirken mehrerer Ursachen bestimmt, so multiplizirt man die zusammengehörigen Ursachen durcheinander, und betrachtet die Summe aller Produkte als das mit dem Ganzen (S) in ein Verhältniß zu setzende Glied (s).

Zusammengesetzte Beispiele.

I. Zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung hatte Kaufmann A 500 fl. auf 3 Jahre, B 600 fl. auf 2 Jahre, C 1000 fl.

auf 1 Jahr gegeben. Wie müssen sie den errungenen Gewinn von 1110 fl. unter sich rechtmäßig vertheilen?

Auflösung.
$$\begin{array}{llll} A & 500\text{ fl.} \times 3\text{(Jahr)} & = & 1500\text{ fl.} \\ B & 600\text{ ,} \times 2\text{ —} & = & 1200\text{ ,} \\ C & 1000\text{ ,} \times 1\text{ —} & = & 1000\text{ ,} \\ \hline & & \text{Summe} = & 3700\text{ fl.} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \not{3}\not{7}\not{0}\not{0} : \not{1}\not{1}\not{0}\not{0} \\ 1 : 3 \end{array} = \left\{ \begin{array}{l|l} 150\not{0} : x & x = 450\text{ fl. Gewinn} \\ 120\not{0} : y & y = 360\text{ fl. —} \\ 100\not{0} : z & z = 300\text{ fl. —} \end{array} \right.$$

II. Zu einer Straßen-Reparation hatte das Dorf A 7 Stücke Zugvieh auf 14, B 4 Stücke auf 20, C 9 Stücke auf 9 Tage gestellt. Wie müssen sie den gemeinschaftlichen Scharwerkslohn von 77 fl. 42 kr. unter sich vertheilen?

III. Bauer A hatte bei einem Truppendurchzuge 2 Mann auf 7, B 5 Mann auf 4, C 9 Mann auf 3, D 12 Mann auf 6 Tage im Quartier. — Wie müssen sie den gemeinschaftlichen Ersatz von 39 fl. 54 kr. unter sich theilen?

IV. Ein Fuhrmann führte einem Kaufmann einmal 80 Ztr. 10 Meilen, ein anderesmal 45 Ztr. 15 Meilen, ein drittesmal 20 Ztr. 45 Meilen weit, und begehrte für diese drei Fuhren 427 fl. 30 kr. — Wie hoch rechnete er eine jede an? Zur Uebung!

V. Drei Bauern stiften eine Weide. A bezahlt für 20 Stücke Vieh 15 fl., B für 24 Stücke 12 fl., C für 36 Stücke 24 fl. Die Summe der verschiedenen Zeiten der Benützung beträgt 115 Tage; wie lange ließ Jeder sein Vieh dahin treiben?

Auflösung. Die Zeiten der Benützung stehen mit der Zahl der Stücke Vieh in verkehrtem, mit dem Pachtschilling in geradem Verhältnisse; daher ergeben sich nach §. 138. II. die Verhältnißzahlen:

$$\begin{array}{lll} \text{für A } \frac{1}{20} \cdot 15 = \frac{3}{4} & \frac{23}{12} : 115 = \frac{9}{12} : x = 45 \text{ Tage} \\ \text{,, B } \frac{1}{24} \cdot 12 = \frac{1}{2} & \qquad\qquad = \frac{6}{12} : y = 30 \\ \text{,, C } \frac{1}{36} \cdot 24 = \frac{2}{3} & \qquad\qquad = \frac{8}{12} : z = 40 \\ \qquad\qquad \overline{\frac{23}{12}} & \qquad\qquad\qquad\qquad \overline{115 \text{ Tage}} \end{array}$$

VI. Drei Personen schoßen zu einer Handelschaft 411 fl. 52 kr. 1 pf. zusammen. A erhielt vom Gewinne für 3 Monate

26 fl. 30 kr., B für 5 Monate 58 fl. 48 kr., C für 8 Monate 164 fl. 45 kr.; wie viel hat jede eingelegt?

Auflösung.

Verhältnißzahl von A $\frac{1}{3}$. $26\frac{1}{2} = \frac{53}{6}$, Einlage 88 fl. 20 kr.

B $\frac{1}{5}$. $58\frac{4}{5} = \frac{294}{25}$ — 117 fl. 36 kr.

C $\frac{1}{8}$. $164\frac{3}{4} = \frac{659}{32}$ — 205 fl. 56 kr. 1 pf.

I. Vermischungs- oder Verbindungsregel.

§. 142.

Die Vermischungsregel ist eine Anleitung, wenn Waaren eines verschiedenen Preises und in verschiedener Quantität in eine Masse zu vermischen sind,

1) den Werth einer Mischungseinheit aus den einzelnen zur Mischung kommenden Quantitäten und deren Werthen zu finden, — mittlere Verbindungsregel;

2) die Quantitäten der einzelnen Ingredienzien aus dem ganzen Mischungsquantum und den gegebenen Verhältnißzahlen zu berechnen, — eigentliche Vermischungsrechnung;

3) aus dem Werthe (und der Quantität) der Mischung und dem Werthe der einzelnen Ingredienzien die Quantitäten der letzteren zu suchen, — Alligationsrechnung.

Die erste Aufgabe gehört zur arithmetischen Proportion (vergl. § 105. III. Beisp. und unten §. 144. Zus. 3. rücksichtlich des zu berechnenden Feingehaltes einer Gold- oder Silber-Legirung); die zweite zur Gesellschaftsrechnung oder Theilung in proportionirte Theile (§. 139.); die gewöhnliche Lösung der dritten ist aus einer allgemeinen Gleichung abgeleitet. In Beziehung auf die zweite Art von Aufgaben folgen einige Beispiele im nächsten §.; über die dritte wird unten eine weitere Anleitung gegeben.

§. 143.

Beispiele der eigentlichen Vermischungsrechnung.

1. Wenn bei einem guten Schießpulver zu 16 Loth Salpeter 3 Loth Kohlen und zwei Loth Schwefel gehören; wie viele

Pfunde sind von diesen Ingredienzien zu 6 Ztr. 30 Pfd. Pulver nothwendig?

16 + 3 + 2 = 21 Summe der Verhängnißzahlen, 6 Ztr. 30 Pfd. = 630 Pfd.

$$21 : 630 \text{ oder } 1 : 30 = \left\{ \begin{array}{l} 16 : x = 480 \\ 3 : y = 90 \\ 2 : z = 60. \end{array} \right.$$

II. Argentan wird bereitet aus 55 Th. Kupfer, 20 Th. Nickel und 25 Th. Zink. Wie viel braucht man von jedem der drei zuletzt genannten Metalle, um 25 Pfunde des ersten zu erhalten?

III. Der feinste Kopallack wird bereitet aus 8 Th. Kopal, 10 Th. Leinöl, ½ Th. Bleizucker und 35 Th. Terpentinöl. Wie viel von jedem zu 20 Pf. Kopallack?

IV. Zur Bereitung der lithographischen Kreide nimmt man 4 Theile weißes Wachs, 2 Th. trockene Talgseife, 2 Th. reinen Talg, 2 Th. Schellack, 1 Th. Lampenschwarz, 1 Th. Kopalfirniß. Wie viel von jedem zu 24 ℔ lithogr. Kreide?

V. Zu einer guten schwarzen Tinte rechnet man auf eine Maß Regenwasser (2,95 Pf. bayer. Apothekergewichts) 2,28 Unzen Eisenvitriol, 4,56 Unzen Galläpfel und 0,76 Unzen Gummi. Wollte man nun 6 Pfund von dieser trockenen Mischung bereiten, wie viel muß von jedem jener Ingredienzien genommen, und wie viel Wasser zugeschüttet werden?

Alligationsrechnung.

Vorerklärungen.

§. 144.

Da bei der Alligationsrechnung auch Silber- und Goldverbindungen von verschiedenem Gehalte zu berechnen sind, so werden hier einige hierauf bezügliche Erklärungen und Vorübungen vorausgeschickt.

1) Silber mit Kupfer und Gold mit Silber oder Kupfer mischen, heißt Silber und Gold legiren. Haben diese Metalle keinen Zusatz, so heißen sie fein. Hiernach nennt man auch eine Mark reines Silber oder Gold eine feine Mark oder eine Mark fein, und eine Mark des legirten edleren Metalls eine rauhe Mark oder eine Mark rauh, oder auch Bruttomark; der Zusatz des unedlen Metalls heißt Beschickung.

2) Feingehalt ist die Menge feinen Silbers oder Goldes, welche in der rauhen Mark enthalten ist. Beim Silber wird der Feingehalt nach Lothen rc., beim Goldgewicht gewöhnlich nach Karaten rc., und zwar bei beiden im Verhältniß zur rauhen Mark bestimmt. So bedeutet 12löthiges Silber, daß in einer rauhen Mark = 16 Loth, an Feinsilber 12 Loth oder in einem bestimmten Stücke der $\frac{12}{16}$te Theil Feinsilber enthalten sey; 14karatiges Gold bedeutet, daß in einer rauhen Mark = 24 Karat sich 14 Karat oder in einem bestimmten Stücke der $\frac{14}{24}$te Theil Feingold befinde.

3) Die Menge feinen Silbers oder Goldes (die Feine) einer Metallmischung aus dem Feingehalte finden, heißt Feinrechnen.

§. 145.

Das Feinrechnen.

1) Man multiplizire das Gewicht der Metallmischung mit dem deren Feingehalt ausdrückenden Bruche. Der Grund ergibt sich einfach aus §. 144. 2° und 3°.

Z. B. 12 Mark 10löthiges Silber enthält $12 \times \frac{10}{16} = 7\frac{1}{2}$ Mark = 7 Mark 8 Loth Feinsilber.

3 Mark 14karatiges Gold enthält $3 \times \frac{14}{24} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ Mark = 1 Mark 18 Karat Feingold.

2) Ist der Feingehalt nicht bloß in Lothen oder Karaten, sondern auch noch in Pfennigen oder Gränen gegeben, so muß der Zähler und Nenner des Feingehalts-Bruches auf die niedrigere Benennung reduzirt werden. Ist z. B. der Feingehalt des Silbers = 12 Loth 6 pf., so ist der Feingehaltsbruch, mit welchem das Brutto- oder Rauhgewicht multiplizirt werden muß,

$$= \frac{12.16+6}{16.16} = \frac{198}{256} = \frac{99}{128}.$$

3) Die angegebene Multiplikation würde sehr langwierig, wenn das Rauhgewicht in Marken, Lothen und Pfennigen gegeben ist; mehr noch, wenn auch der Feingehalt durch verschiedene Einheitsbenennungen ausgedrückt ist. In diesen Fällen wird zur Abkürzung der Rechnung der Bruch, mit welchem multiplizirt werden muß, nach §. 117. III. in Summanden zerlegt, was hier um so leichter ist, als 16 und 256 Potenzen von 2 sind.

Beispiele.

I. Es soll die Feine von 14 Mark 8 Loth 12 pf., welche 12 Loth in der Mark fein halten, gesucht werden.

Auflösung. Der Reduktionsbruch $\frac{12}{16} = \frac{8}{16} + \frac{4}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Bruttomark	14 M.	8 Loth	12 pf.	
für $\frac{1}{2}$ . .	7 „	4 „	6 „	
„ $\frac{1}{4}$ . .	3 „	10 „	3 „	
Summa	10 M.	14 Loth	9 pf.	Feingehalt.

II. Was ist die Feine von 14 M. 10 L. 12 pf. à 13 L. 9 pf.?

Auflösung. Reduktionsbrüche $= \frac{13}{16} + \frac{9}{256} = (\frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16}) + (\frac{8}{256} + \frac{1}{256}) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}) + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32.8}\right)$

Bruttomark		14 Mark	10 Loth	12 pf.	— Sztl.
für $\frac{1}{2}$ . . .		7 „	5 „	6 „	— „
„ $\frac{1}{4}$ . . .		3 „	10 „	11 „	— „
„ $\frac{1}{16} = \frac{1}{4} : 4$		— „	14 „	10 „	12 „
„ $\frac{1}{32} = \frac{1}{16} : 2$		— „	7 „	5 „	6 „
„ $\frac{1}{256} = \frac{1}{32} : 8$		— „	— „	14 „	10 „
Summa		42 Mark	6 Loth	15 pf.	12 Sztl. Feingehalt.

Zusatz 1. Sind im Feingehalte statt Pfennigen Gräne gegeben, deren 18 = 1 Loth, so zerlegt man den Bruch mit Rücksicht darauf, daß 18 zu Faktoren 3, 3.2, 3.3 hat. Z. B. 8 Gräne sind $= \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ Loth.

Zusatz 2. Ist der Gehalt in Karat und Grän gegeben, so kann man vorher die Karate in Lothe verwandeln nach dem Verhältniß 24 Karat = 16 Loth oder 3 Karat = 2 Loth.

Zusatz 3. Aus den Rauhgewichten und Feingehalten zu mischender Metalle wird der Feingehalt der Mischung nach der mittleren Verbindungsregel (§. 105. III.) in der Art gefunden, daß man die Rauhgewichte der einzelnen Metalle mit ihrem Feingehalte multiplizirt und die Summe dieser Produkte durch die Summe der Rauhgewichte dividirt.

Beispiele.

I. Es werden 5 Mark Feinsilber und 3 Mark Kupfer zusammengeschmolzen; wie viel löthig wird die Mischung?

Operation. Das Feinsilber hat den Gehalt 16, Kupfer den Gehalt 0; also

5 Mark	Feinsilber	enthalten	$5 \times 16 = 80$	Loth Silber
3 „	Kupfer	„ „	$3 \times 0 = 0$	„ „
8 „	Mischung	„ „	80	„ „
1 „	„ „	enthält	$\frac{80}{8} = 10$	Loth Silber,

die Mischung wird also 10 löthig.

II. Es werden
3 Mark 4 Loth im Feingehalte von 11 Loth 4 pf.
1 „ 8 „ „ „ „ „ 9 „ 8 „
4 „ 6 „ „ „ „ „ 12 „ — „
zusammengeschmolzen. Welches ist der Feingehalt der Mischung?

Operation.

3 M. 4 L. $= 3\frac{1}{4}$ M. enthalten $3\frac{1}{4} \times 11\frac{1}{4} = \frac{585}{16}$ Loth Feinsilber
1 „ 8 „ $= 1\frac{1}{2}$ „ „ „ $1\frac{1}{2} \times 9\frac{1}{2} = \frac{57}{4}$ „ „ „
4 „ 6 „ $= 4\frac{3}{8}$ „ „ „ $4\frac{3}{8} \times 12 = \frac{105}{2}$ „ „ „

$9\frac{1}{8}$ M. Mischung enthalten $\frac{1653}{16}$ Loth Feinsilber
1 Mk. Mischung $\frac{1653}{16} : 9\frac{1}{8} = 11\frac{47}{146}$ Loth $=$ 11 Loth 5 pf. Feinsilber.

Eigentliche Alligationsrechnung.

§. 146.

I. Aufgabe. Aus den Werthen der zu vermischenden Waaren und dem Werthe der Mischung die quantitativen Verhältnißzahlen der ersteren zu finden.

a) Wenn zwei Dinge gegeben sind.

Auflösung. Man ziehe zwei senkrechte Striche, setze vor den ersten Strich in die Mitte den Mittelwerth, und zwischen die beiden Striche oben den höheren, unten den niederern Werth. Darnach ziehe man den geringeren vom mittleren und den mittleren von dem höheren Werthe ab. Die erstere Differenz setze man nach dem zweiten Striche oben, die letztere unten an. Die Summe dieser beiden Differenzen gibt den Nenner der die Mischungsverhältnisse ausdrückenden Brüche, die erste Differenz den Zähler für die bessere, die zweite für die geringere Sorte an.

Beispiel zur Erläuterung. Ein Goldschmied hat 10- und 15löthiges Silber. Er möchte daraus 13löthiges erhalten. Wie viel muß er von jeder jener Sorten zur Mischung nehmen?

Operation.

	15	13 — 10 = 3
13		
	10	15 — 13 = 2
		5

Von der besseren Sorte hat er $\frac{3}{5}$, von der geringeren $\frac{2}{5}$ des Ganzen zu nehmen; also, wenn er
von der besseren Sorte $\frac{3}{5}$, 3, 6, 9, 12.... Theile nimmt, treffen
auf die geringere $\frac{2}{5}$, 2, 4, 6, 8.... Theile.

Beweis. Der Mischungswerth muß zwischen den Werthen der beiden Ingredienzien liegen. Wäre der Mischungswerth von den Werthen der Ingredienzien gleichweit entfernt, so müßte von beiden Sorten offenbar gleichviel genommen werden. Je mehr aber der Mischungswerth dem Werthe der einen Sorte sich nähert, desto weniger braucht man von dieser zu nehmen, und je mehr er von der andern verschieden ist, desto mehr muß davon genommen werden.

Anmerkung. Das angegebene Verfahren ist eigentlich aus der Lösung einer allgemeinen einfachen Gleichung abgeleitet.

b) Wenn mehr als zwei Dinge zu vermischen sind.

Auflösung. In diesem Falle ist immer ein höherer und niederer Werth mit dem mittleren nach Obigem durch Subtraktion zu verbinden. Muß zu diesem Zwecke der eine Werth zwei- oder mehrmal mit dem Mittelwerthe verglichen werden, so werden die beiden oder mehreren dafür gefundenen Differenzen addirt, um den entsprechenden Zähler des Verhältnißbruches zu erhalten. Die Summe aller Differenzen gibt wieder den gemeinschaftlichen Nenner der Verhältnißbrüche.

Beispiel. Ein Handelsmann hat dreierlei Sorten Kaffee, das Pfund zu 1 fl. 12 kr., 54 kr. und 36 kr. Er möchte daraus eine solche Mischung machen, daß ein Pfund derselben auf 48 kr. zu stehen komme. Wie muß die Mischung geschehen?

Operation.

1 fl. 12 kr. = 12 Sechser, 54 kr. = 9 S., 36 kr. = 6 S., 48 kr. = 8 S.

8	12	8 − 6 = 2	8	9	8 − 6 = 2
	6	12 − 8 = 4		6	9 − 8 = 1

Nenner der Verhältnißbrüche: 2 + 2 + 4 + 1 = 9

Zähler des ersten und zweiten Bruches = 2, des dritten = 4 + 1 = 5.

Also sind von d. besten Sorte $\frac{2}{9}$ oder 2, 4, 6.... Theile zu nehmen
" " zweiten " $\frac{2}{9}$ " 2, 4, 6.... "
" " geringsten $\frac{5}{9}$ " 5, 10, 15.... "
für das Mischungsquantum 1 " 9, 18, 27

§. 147.

II. Aufgabe. Die Quantität eines einzelnen Ingrediens aus dessen Werthe (oder die Quantitäten einzelner Ingredienzien aus deren Werthen), dem Mischungswerthe

und dem Werthe und der Quantität eines der Ingredienzien zu finden.

Auflösung. Man suche nach dem vorausgehenden §. die Werthdifferenzen der einzelnen Ingredienzien, und bilde die Proportion: Die Werthdifferenzen zweier Ingredienzien verhalten sich, wie deren Quantitäten.

Anmerkung. Die Probe wird gemacht, daß man nach §. 145. Zus. 3. den Feingehalt der Mischung sucht.

Beispiele.

I. Es sollen 15 Mark 12 Loth 8 pf. Konventionsthaler, welche (metrologische Tafel VIII. der II. Abth.) 13 Loth 6 Grän fein halten, mit Kupfer auf 13 Loth legirt werden; wie viel Kupfer ist dazu nöthig?

Operation.

13 Loth 6 Gr. = 240 Gr., 15 M. 12 L. 8 pf. = 4040 pf.

$$234\left|\begin{array}{c}240\\0\end{array}\right|\begin{array}{c}234\\6\end{array}$$

234 : 6 = 15 M. 12 L. 8 pf. : x

39 : 1 = 4040 : x

$x = \frac{4040}{39} = 103\frac{23}{39}$ pf. $= 6$ Loth $7\frac{23}{39}$ pf. Kupfer.

$$\text{Probe.}\quad 4040 \times 240 = \qquad 96960$$
$$\frac{4040}{39} \times 0 = \qquad 0$$

$$4040 + \frac{4040}{39} = \frac{4040\,(39+1)}{39},\ 96960 = 4040\,.\,240$$

$$4040.240 : \frac{4040.40}{39} = 4040.240 \times \frac{39}{4040.40} = 6.39 = 234.$$

II. Ein Goldarbeiter hat 2 Mark 1 Loth 12 pf. Gold im Gehalte von 8 Loth 2 Gr.; er will nun dasselbe mit feinem Golde auf 14 Karat legiren. Wie viel muß er vom Feingold hinzuschmelzen?

Operation. 8 Loth 2 Gr. = 146 Gr., 14 Karat = 168 Gr.; 24 Karat = 288 Gr.; 2 Mk. 1 L. 12 pf. = 540 pf.

$$168\left|\begin{array}{c}288\\146\end{array}\right|\begin{array}{c}22\\120\end{array}$$

120 : 22 = 540 : x = 99 pf. = 6 Loth 3 pf. Feingold.

III. Ein Silberarbeiter kauft eine 2 Mark 14 Loth 14 pf. schwere Plansche, die in der Mark 10 Loth 11 Grän fein hält; er will sie mit Fünffrankenthalern auf Probsilber (13 löth.) legiren. Wie viel muß er von Fünffrankenthaler-Silber, dessen Gehalt 14 Loth 7 Grän ist, dazu nehmen?

Operation. 10 Loth 11 Gr. = 191 Gr., 14 L. 7 Gr. = 259 Gr.
13 Loth = 234 Gr., 2 Mk. 14 L. 14 pf. = 750 pf.

	259	43
234		
	191	25

25 : 43 = 750 : x
1 : 43 = 30 : x = 1290 pf. = 5 Mk. 10 pf.

IV. Es werden dreierlei Weine untereinander gemischt; von a kostet die Maß 1 fl. 10 kr., von b 54 kr., von c 48 kr. Von der besten Sorte nimmt man 30 Maß in die Mischung. Wie viel Maß Wasser muß darunter geschüttet, und wie viel von jedem der beiden geringeren Weinsorten genommen werden, daß die Maß auf 45 kr. zu stehen komme?

Operation. Der Werth des Wassers = 0

	70	45			54	45			48	45	
45				45				45			
	0	25			0	9			0	3	

Für das Wasser die Differenzen 25 + 9 + 3 = 37 als Verhältnißzahl.

V.Z. V.Z. M. M.
45 : 37 = 30 : x = $24\frac{2}{3}$ Maß Wasser.

Von jeder der beiden geringeren Weinsorten ist, da sich dafür die nämliche Differenz (Verhältnißzahl) ergibt, wie für die beste, 30 Maß zu nehmen.

Probe. a) 30 . 70 = 2100 kr.
b) 30 . 54 = 1620 „
c) 30 . 45 = 1440 „
d) $24\frac{2}{4}$. 0 = 0 „
$114\frac{2}{3}$ Maß 5160 kr.

1 Maß ist werth 5160 : $114\frac{2}{3}$ = 45.

§. 148.

III. Aufgabe. Aus dem Werthe der Ingredienzien und dem Werthe und der Quantität der Mischung die Quantitäten der ersteren zu finden.

Auf-

Auflösung. Man suche nach §. 145. die Verhältnißbrüche der Ingredienzien, und multiplizire mit diesen das Mischungsquantum. Man könnte, auf etwas weitläufigere Art, auch nach der Proportion verfahren: Die Summe der Differenzen (Verhältnißzahlen) verhält sich zum Mischungsquantum, wie jede einzelne Differenz (Verhältnißzahl) zur treffenden Quantität. (Vergl. 138. u. 142.)

Beispiele.

I. Ein Goldarbeiter hat Gold im Feingehalte von 10 Loth 6 Grän und österreichische Souverainsd'or, deren Gehalt 22 Karat ist; er möchte daraus 2 Mk. 7 Loth 18karatiges Gold erhalten; wie viel muß er von jedem der ersteren Goldsorten nehmen?

Operation. 10 Loth 6 Gr. = 186 Grän, 22 Karat = 264 Grän, 18 Karat = 216 Grän, 2 Mk. 7 Loth = 39 Loth.

216	264	30
	186	48
		78

Verhältnißbrüche: $\frac{30}{78} = \frac{5}{13}$ und $\frac{48}{78} = \frac{8}{13}$.

Also vom besseren Golde $39 \cdot \frac{5}{13} = 15$ Loth,

" geringeren " $39 \cdot \frac{8}{13} = 24$ "

Oder $78 : 39 = 30 : x = 15$ Loth

$78 : 39 = 48 : x = 24$ "

Probe. $15 . 264 = 3960$

$24 . 186 = 4464$

$39 \quad 8424$

Mittelwerth $\frac{8424}{39} = 216$ Grän $= 12$ Loth $= 18$ Karat.

II. Ein Silberarbeiter soll ein silbernes Kirchengeschirr, 3 Mark 12 Loth schwer, von 10löthigem Silber verfertigen. Nun hat er nur 13- und 11löthiges. Wie viel muß er Kupfer dazu nehmen?

Operation.

10	13	10	10	11	10
	0	3		0	1

Verhältnißbruch des 13-, so wie des 11löthigen Silbers $\frac{10}{10+10+3+1}$

$= \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

Verhältnißbruch des Kupfers $\frac{3+1}{24} = \frac{2}{12}$.

Daher vom 13=, so wie vom 11löthigen (3 Mk. 12 L.). $\frac{5}{12}$ = 60 . $\frac{5}{12}$ = 25 Loth,
vom Kupfer 60 . $\frac{2}{12}$ = 10 Loth,
oder 24 : 60 = 10 : x und 24 : 60 = 4 : x.

Probe. a) 25 . 13 = 325
25 . 11 = 275
10 . 0 = 0
60 600
600 : 60 = 10 Loth Gehalt.

oder b) die ersten 25 Loth enthalten 25 . $\frac{13}{16}$ Loth Feinsilber
die zweiten 25 = = = 25 . $\frac{11}{16}$ = = =
die 10 L. Kpf. = = 0 = = =
60 Lth. Mischung 25 . $\frac{24}{16}$ = 37½ = =
16 Loth = 1 Mark, $\frac{75}{2} \cdot \frac{16}{60}$ = 10 Loth = =
Die Mischung ist 10löthig.

III. Jemand hat Spiritus zu 60, 55, 48 und 42 Grad; er möchte von diesen 4 Sorten eine 50 Maß haltende Mischung, welche 50 Grad Gehalt hat, machen. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

Operation. Da hier in Beziehung auf den Mischungswerth gleich viel bessere und geringere Sorten gegeben sind, so läßt sich die Auffindung der Differenzen mittelst Eines Ansatzes in folgender Art bewirken.

	60	50 — 42 = 8
	55	50 — 48 = 2
50		
	48	55 — 50 = 5
	42	60 — 50 = 10
		25

Also der Ordnung nach $\frac{8}{25}$. 50 = 16, $\frac{2}{25}$. 50 = 4, $\frac{5}{25}$. 50 = 10, $\frac{10}{25}$. 50 = 20 Maß.

Metrologische Tafeln.

Erste Abtheilung.

Masse, Gewichte, Münzen &c. nach ihren Eintheilungen in Bayern.

* Das System des neuen französischen Masses folgt in der II. Abtheilung. IX.

Mineralogische Tabellen.

Erste Abtheilung.

Massen, Gemenge, Gesteine *) nach ihren Abänderungen

in

Gruppen.

---

*) Das System der [illegible] Massen folgt in der II. Abtheilung. IX.

A. Längenmaſs.

1) Kleinere Längen zu messen, hat man den Fuß, die Elle; für größere die Klafter, die Ruthe, die Meile.

2) Nimmt man den ehemaligen königl. Pariser Fuß zu 1440,0 Theilen an, so beträgt der bayerische Fuß bei 13° R. 1293,8 solcher Theile, oder 129,38 Duodez. Pariser Linien = 291,859 Millimetres.

3) Die bayerische Elle hält 2 Fuß, 10¼ bayerische Duodezimalzoll, oder 2',8.541666" Dez. = 28,541666" Dez. bayer. oder 369,27 Pariser Linien = 0,8330147 Metres.

4) Die geometrische Ruthe hält 10 bayerische Fuß, oder 8,9477 Pariser Fuß.

5) Die bayerische Klafter hält in der Länge 6 bayerische Fuß, oder 5,36863 franz. Fuß.

6) Das größte übliche Längenmaß ist die Meile, und zwar in Deutschland die deutsche oder geographische Meile, deren 15 auf einen Meridiangrad gehen.

a) Die deutsche Meile beträgt 22803,29 Pariser, oder 25380,076 bayerische Fuß.

b) Die bayerische Chaussée-Meile betrug ehemals 26000 bayerische Fuß; gegenwärtig aber beträgt sie nur 25406, folglich eine Causséestunde 12703, in welcher Entfernung auch die Stundensaulen gesetzt sind.

7) Man unterscheidet den geometrischen und den bürgerlichen Fuß (oder Werkschuh). Jener wird nach dem Dezimal-, dieser nach dem Duodezimalmaße eingetheilt.

8) Einfacher Längenfuß im Duodezimalmaße.

Ruthen.	Fuß.	Zoll.	Linien.	Skrupel oder Haarbreiten.
1°	12'	144"	1728"	20736"'
	1	12	144	1728
		1	12	144
			1	12

9) Einfacher Längenfuß im Dezimalmaße.

Ruthen.	Fuß.	Zoll.	Linien.	Skrupel.
1°	10′	100″	1000‴	10000⁗
	1	10	100	1000
		1	10	100
			1	10

* Der rheinbayerische Fuß = ⅓ Meter; die rheinbayer. Elle = 1,2 Meter = 1 franz. Aune usuelle.

B. Flächenmaſs.

1) Kleinere Flächen zu messen, dient der Quadratzoll, der Quadratfuß, die Quadratklafter, die Quadratruthe; für größere das Tagwerk oder Jauchert; für noch größere die Quadratmeile.

2) Der bayerische □ Fuß = 116,244055 .... Pariser □ Zolle.

3) Die bayerische □ Klafter = 36 bayerische □ Fuß.

4) Die bayerische □ Ruthe = 100 bayerische □ Fuß.

5) Ein bayerisches Tagwerk oder Jauchert ist 200 bayerische Fuß lang, und eben so breit, und hält 40,000 bayerische □ Fuß = 34,0727 franz. Aren. Dasselbe ist = 100 Dezimalen, so daß 1 Dezimale = 400 □ Fuß.

6) Die deutsche Quadratmeile hält 519′990.034,8241 französische Quadratfuß.

7) Flächenmaß im Duodezimalmaße.

□ Ruthe.	□ Fuß.	□ Zoll.	□ Linien.
1	144	20.736	2′985.984
	1	144	20.736
		1	144

8) Flächenmaß im Dezimalmaße.

□ Ruthe.	□ Fuß.	□ Zoll.	□ Linien.
1	100	10000	1′000.000
	1	100	10.000
		1	100

C. Körpermaſs.

1) Kleinere Körper zu messen, dient der Kubikzoll, der Kubikfuß; größere — die Kubikruthe, Kubikklafter. Das größte Körpermaß ist die Kubikmeile.

2) Der bayerische Kubikfuß = 1253,307626 französische Duodez.-Kubikzoll. Die bayerische Kubikruthe hat 1000 Kubikfuß.

3) Da die gesetzmäßige Scheiterlänge 3½ Fuß ist, so beträgt die bayerische Kubikklafter, als Holzmaß, 126 bayerische Kubikfuß. Eine Klafter Scheiterholz hält im Durchschnitte 89 Kubikfuß, eine Klafter Prügelholz 75 Kubikfuß solide Holzmasse.

Die rheinbayer. Holzklafter ist = 3,58 Kubikmeter oder Steren = 144 bayer. Kubikfuß.

Als sonstiges Körpermaß hat die Kubikklafter 216 Kubikfuß.

4) Körpermaß im Duodezimalmaße.

Kub. Fuß.	Kub. Zoll.	Kub. Linien.
1	1728	2'985.984
	1	1728

5) Körpermaß im Dezimalmaße.

Kub. Ruthe.	Kub. Fuß.	Kub. Zoll.	Kub. Linien.
1	1000	1'000.000	1000'000.000
	1	1000	1'000.000
		1	1000

6) Die bei dem Bauwesen eingeführte Schachtruthe ist = $\frac{1}{10}$ bayer. Kubikruthe = 100 bayer. Kubikfuß = 2,4861 Kubik-Meter.

7) Zum Körpermaß gehören auch die Geträuk- und Getreidmaße. — Wieder andere Körper werden durch das Gewicht bestimmt, andere bloß gezählt; also

I. Bayerisches Geträukmaß.

1) Um Flüssigkeiten überhaupt zu messen, dient als Einheit die bayerische Maßkanne, welche 43 bayerische Dezimalkubikzoll = 74,304 c″ dd. b., folglich 53,8923 Pariser Duodez.-Kubikzolle beträgt und = 1,06903 Liter ist.

2) Der bayerische Visir-Eimer hält 64 Maßkannen, und ist = 2752 bayerische Dezimalkubikzoll = 3449,1072 Pariser Duodez. Kubikzoll = 68,4177 Liter.

3) Der bayerische Schenk-Eimer, das gewöhnliche Wein- und Handelsmaß, beträgt 60 Maßkannen, und ist = 2580 bayer. Dezimalkubikzoll = 3233,534 französische Duodez. Kubikzoll = 64,1416 Liter.

4) Das Faß Bier hat 25 Visir-Eimer.

5) Eintheilung des Wein-, Bier- und Essigmaßes.

Fuder.	Ohm.	Schenk-Eimer.	Maß.	Halbe (Seidel).	Quartel (Schoppen).	Achterl (halbe Schoppen).
1	6	12	720	1440	2880	5760
	1	2	120	240	480	960
		1	60	120	240	480
			1	2	4	8
				1	2	4
					1	2

* In Rheinbayern gilt die Eintheilung: 1 Hektoliter = 10 Dekaliter, 1 Dekaliter = 10 Liter.

II. Bayerisches Getreidmaß.

1) Für das Getreidmaß ist der altbayerische Metzen die Einheit; er hält genau $34\frac{2}{3}$ bayerische Maßkannen, oder 1490,666 bayerische Dezimalkubikzoll, oder 1868,2664 französische Duodez. Kubikzoll.

2) Das Sechs-Metzen-Maß oder Schäffel hält 208 Maß, oder 8 Kubikfuß 944 Dezimalkubikzoll bayer. = 8944 bayer. Dezim. Kbz. = 11209,5948 franz. Duodezimalkubikzoll, und gilt für alle Getreidearten.

* Ehemals hatte das Haberschäffel 7 bayerische Metzen.

3) Eintheilung des bayerischen Getreid- und Mehlmaßes.

Schäffel.	Metzen.	Viertel oder halbe Metzen.	Maßel oder $\frac{1}{16}$ Metzen.	Dreißiger od. $\frac{1}{32}$ Metzen.
1	6	12	96	192
	1	2	16	32
		1	8	16
			1	2

* In Rheinbayern: 1 Hektoliter = 4 Viernsel, 1 Viernsel = 2 Simmer, 1 Simmer = 4 Vierling.

III. Bayerisches Kalkmaß.

Als Einheit des Kalkmaßes ist in Bayern durch Verordnung vom 7. Juni 1811 der Metzen bestimmt; jedoch ist das Maß selbst in Form eines abgekürzten Kegels mit $1\frac{1}{2}$ Fuß untern, $1\frac{1}{4}$ Fuß obern Durchmesser, 11 Zoll $8\frac{2}{3}$ Linien Höhe zu verfertigen. Beim Messen wird der Metzen gehaûft. 6 Metzen geben 1 Schäffel, 24 Metzen eine Muth.

IV. Bayerisches Gewicht.

1) Die Einheit ist das alte Münchener oder altbayerische Pfund, welches 560 Gramm wiegt, = 11647,638 holl. Aß = 156936 kölln. Richtpfennige.

2) 1 bayer. Kubikfuß Regenwasser wiegt 44,17 Pfund des bayer. Handelsgewichtes.

3) Das neue bayerische Apothekergewicht beträgt, nach einer königlichen Verordnung vom 30. Jänner 1811, genau 100887,12 kölln. Richtpfennige, oder 7487,7409 holländ. Aß oder 360 franz. Gramm, so daß

14 Apotheker Pfund = 9 Pfund Handelsgewicht, und

7 Loth Apoth. Gew. = 6 Loth bürgerl. Gewicht.

4) In Folge einer unter den Zoll-Vereinsstaaten i. J. 1837 getroffenen Uebereinkunft wird bei sämmtlichen Zollämtern des Königreiches ein eigenes Zollgewicht, wobei das Pfund zu $\frac{1}{2}$ Kilogramm (= $\frac{25}{28}$ Pfd. bayer. Handelsgewichtes) angenommen wird, gebraucht.

5) Eintheilung des bayerischen Handelsgewichtes.

Zentner.	Pfund.	Loth.	Quintl.
1	100	3200	12800
	1	32	128
		1	4

* Der Richtpfennig oder das Pfenniggewicht = $\frac{1}{4}$ Quintl = $\frac{1}{512}$ Pfund, und der Gran = $\frac{1}{15}$ Pfenniggewicht kommen im gewöhnlichen Verkehre nicht vor.

** Eine Last = 2 Tonnen, 1 Tonne = 2 Ztr.; der Stein (für Hanf und Flachs) = 20 Pfund.

*** In Rheinbayern hat der Quintal oder Zentner 100 Kilogramm = 2 deutsche Zollzentner; das Pfund 500 Gramm oder $\frac{1}{2}$ Kilogramm = 1 deutsches Zollpfund.

6) Eintheilung des bayerischen Apothekergewichts.

Pfund.	Unze.	Drachme.	Skrupel.	Gran.
1	12	96	288	5760
	1	8	24	480
		1	3	60
			1	20

* Ein Gran hat beinahe die Schwere eines Getreidkorns. Bei flüssigen Dingen rechnet man einen Löffel voll für ein Loth, 1 Tropfen für ein Gran, 1 Maß für 48 Unzen oder 4 Pfund.

7) Eintheilung des neuen bayerischen Münzgewichtes oder der neuen Münzmark (Vereinsmark = preußischen Mark).

Mark.	Loth.	Quintl.	Pfennig.	Richtpfennig.
1	16	64	256	65536
	1	4	16	4096
		1	4	1024
			1	256

Die in Bayern gesetzlichen Gewichte für Silber sind: die bayerische Mark = 0,5 bayerischen Pfunden und die Kölner Mark. Letztere ist als Vereins-Münzmark = 233,95 Gramm = 0,417599 bayerischen Pfunden, als ältere bayerisch-kölnische Mark = 233,855 Gramm. Für Goldgewicht wird in Bayern außer der Kölner Mark auch das Dukaten- und Kronengewicht gebraucht; vom ersteren gehen 67 Dukaten, vom letzteren 72 Kronen auf die Kölner Mark.

8) Eintheilung der Probirmark für Silber.

1 Mk. = 16 Loth = 256 Pfennig, oder 1 Mk. = 16 Loth = 288 Grän
1 „ = 16 „ 1 „ = 18 „

9) Eintheilung der Probirmark für Gold.

1 Mk. = 16 Loth = 288 Grän, oder 1 Mk. = 24 Karat = 288 Grän
1 „ = 18 „ 1 „ = 12 „

In Bayern ist der gesetzmäßige Feingehalt für alles verarbeitete Silber 13 Loth, und für alles verarbeitete Gold 14 Karat.

V. Papierrechnung (Schreibpapier).

Ballen.	Ries.	Buch.	Bogen.
1	10	200	4800
	1	20	480
		1	24

* Ein Buch Druckpapier hält 25, ein Ries 500, ein Ballen 5000 Bogen.

VI. Maße nach Stücken.

Schock (Schober).	Schilling.	Mandel.	Dutzend.	Stücke.
1	2	4	5	60
	1	2	$2\frac{1}{2}$	30
		1	$1\frac{1}{4}$	15
			1	12

D. Zeitrechnung.

I. Das astronomische (tropische) Sonnenjahr beträgt 365 Tage, 5 Stunden, 48′, 45″, 30‴.

Anmerkung. Cajus Julius Cäsar, welcher im Jahre 45 vor der gemeinen christlichen Zeitrechnung den römischen Kalender verbesserte, setzte das Sonnenjahr auf 365 Tage 6 Stunden (also 11′, 14″, 30‴ zu hoch), und verordnete, daß diese 6 Stunden in jedem vierten Jahre zu einem ganzen Tage gezählt und eingeschaltet werden sollten. Diese zu viel eingeschaltenen Zeittheilchen wuchsen nach Jahrhunderten endlich zu Tagen an; daher kam es, daß Papst Gregor XIII. im Jahre 1582 bei der Verbesserung des Julianischen Kalenders 10 Tage herauswarf.

II. Im gemeinen Leben theilt man das Jahr in 52 Wochen oder 12 Monate; einen Monat in 30 Tage (im Durchschnitte); die Woche in 7 Tage; den Tag in 24 Stunden; die Stunde in 60 Minuten; die Minute in 60 Sekunden; die Sekunde in 60 Terzien. — Alle vier Jahre ist ein Schaltjahr von 366 Tagen, wovon aber die Sekularjahre in etwas abgehen.

Zusatz 1. Seit, und zufolge der vom Papst Gregor XIII. im Jahre 1582 vorgenommenen Kalenderverbesserung sind nur jene Sekularjahre, deren erste (höchste) zwei Zifferstellen durch 4 ohne Rest theilbar sind, z. B. 1600, 2000, Schaltjahre; die übrigen aber, 1700, 1800, 1900, sind gemeine Jahre. — Vor dieser Kalenderform waren alle Sekularjahre auch Schaltjahre. — Hier kann auch der Unterschied zwischen dem neuen Gregorianischen und dem alten Julianischen Kalender angemerkt werden.

a) Im Jahre 1582 wurden im Gregorianischen Kalender 10 zu viel eingeschaltete Tage ausgelassen, und man zählte vom 4ten Oktober gleich auf den 15ten.

b) Im Jahre 1700 wurde der eilfte, im Jahre 1800 der zwölfte Schalttag ausgelassen. Daher sind die Völker, welche sich des Julianischen Kalenders bedienen (z. B. Griechen und Russen), vom Jahre 1582 bis 1699 gegen die Katholiken um 10 Tage, von 1700 bis 1799 um 11, von 1808 bis 1899 um 12 Tage zurück.

c) Man drückt dieses aus entweder mit den Worten: stili novi und stili veteris (alten und neuen Stiles), oder man setzt die beiderseitigen Monatstage in Form eines Bruches an:

z. B.	5 Octob. stil. vet.	15 Octob. stil. nov. 1582.
	7 Sept. stil. vet.	18 Sept. stil. nov. 1724.
	8 Mart. stil. vet.	20 Mart. stil. nov. 1823.

Oder: $\frac{5}{15}$ Oct., $\frac{7}{18}$ Sept., $\frac{8}{20}$ Mart.

Zusatz 2. Eine Lunation, d. i. die Zeit von einem Neumonde zum andern, beträgt 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 3 Sekunden.

E. Geldrechnung.

1) Es gibt reelle und fingirte Münzen. Die reellen oder gangbaren Münzen sind wirklich geprägte Geldstücke. Unter fingirten oder Rechnungsmünzen versteht man den Maßstab für den Kaufwerth der Dinge, und also auch der gangbaren Münzen. Fingirte Münzen sind z. B. in England das Pfund Sterling, in Frankreich (ehemals) der Livre, in Deutschland der Reichsthaler.

2) Der Werth der reellen Münzen hängt von der Güte und von dem Gewichte des darin enthaltenen Metalls ab, zu dessen Bestimmung in Deutschland das Kölnische Markgewicht angewendet wird. Vergl. oben IV. 8—10.

3) Das Gewicht einer Münzsorte heißt ihr Schrot, und ihr Gehalt an edlerem Metalle, das Korn. Durch den Münzfuß wird Schrot, Korn und Kaufwerth einer Münze bestimmt.

4) Das Gepräge der Münze enthält Schrift, Namen, Bildniß und Wappen des Münzherrn, wodurch derselbe die Beschaffenheit der Münze versichert. Die Bildseite heißt die Hauptseite, Avers; die Schrift- oder Wappenseite heißt Revers (Rückseite).

5) Manchmal ist durch gewisse Münzzeichen, gewöhnlich Buchstaben, seltener durch andere Symbole (z. B. eine Sonne, einen Halbmond, einen Stern, ein Thier, eine Frucht), die Münzstätte angezeigt, in welcher die Münze geprägt wurde. So bedeutete A auf bayerischen Münzen einst Amberg, auf französischen Paris, auf österreichischen Wien, auf preußischen Berlin; B Rouen, Kremnitz, Breslau; C St. Lo, Caen, Prag, Kleve; D Lyon, Grätz, Aurich u. s. w.

6) Die merkwürdigsten Münzfuße für Deutschland sind:

a) Im Golde:

α) der rheinische Goldguldenfuß, 72 Stück auf die rauhe Mark von 18 Karat, 6 Gran Goldes und 3 Karat Silber; nach diesem Fuße sind die bayerischen Karoline und Max-d'ors geprägt;

β) der Dukatenfuß, 67 Stück auf eine feine Mark von 23 Karat, 8 Gran Gold und 2 Gran Silber.

b) Im Silber:

α) der Graumannische oder 14 Thalerfuß (1750 von Preußen angenommen, und seit 1764 erneuert); die feine Mark Silber auf 14 Thaler, oder 24½ Gulden nach dem gleichnamigen Münzfuße ausgeprägt. Der Thaler = 1 fl. 45 kr. im 24½ Guldenfuß. In Preußen, Hessen-Kassel, Sachsen-Weimar, Lippe, den Reußischen Fürstenthümern, in Waldeck

ist der Thaler zu 30 Silbergroschen à 12 Pfennigen; im Königreich Sachsen und in Sachsen-Altenburg zu 30 Neugroschen à 10 Pfennigen; in Braunschweig und Hannover in 24 gute Groschen à 12 Pfennigen abgetheilt.

β) der Konventions- oder 20 Guldenfuß, die feine Mark zu $13\frac{1}{3}$ Reichsthaler oder 20 fl., im Jahre 1753 von Oesterreich, Bayern und Sachsen angenommen. Doch nur in österreichischen Landen kursiren die Silbermünzen nach diesem Fuße. Für Bayern (und das ehemals sogenannte Reich) galt bis 1837 und gilt zum Theil noch, wenn auch nicht gesetzlich,

γ) der 24 Guldenfuß (1766), die feine Mark zu 16 Reichsthaler, 24 Gulden oder 10 Konventionsthaler;

δ) der $24\frac{1}{2}$ Guldenfuß seit dem 25. August 1837, bezüglich 30. Juli 1838 gesetzlich in Bayern, Würtemberg, Baden, Hessen-Darmstadt, Nassau, Sachsen-Meiningen, Sachsen-Coburg, Hohenzollern, Hessen-Homburg, Frankfurt a. M. und seit 1839 in den Anhaltischen Herzogthümern eingeführt. Er ist eigentlich mit dem 14 Thalerfuße einerlei. Nach demselben wird 1 Mark = 233,855 Gramm fein Silber zu $24\frac{1}{2}$ fl.; der Gulden zu 60 Kreuzer, der halbe Gulden zu 30 kr., mit 0,9 Feingehalt ausgeprägt. Bei den Scheidemünzen, Sechsern und Groschen (6 und 3 Kreuzer-Stücken) wird die Mark fein zu 27 fl. ausgeprägt, und ist der Feingehalt nur $\frac{1}{3}$; die Kreuzerstücke im 28 fl.-Fuße.

7) In Bayern geprägte oder kursirende Münzen.

a) Goldmünzen,

α) gegenwärtig in Bayern geprägte:

Dukaten (67 Stück auf eine Vereinsmark brutto, 67,94 Stück auf 1 Mark fein, 3,49 Gramm = 72,6206 holl. Aß schwer; 23 Karat 8 Grän Feingehalt) zu 5 fl. 30 kr. bis 5 fl. 36 kr. kursirend;

β) früher in Bayern geprägte, noch hin und wieder kursirende:

Karolinen, einfache, zu 11 fl. kursirend,
" " halbe, zu 5 fl. 30 kr.,
" " viertel, zu 2 fl. 45 kr.,

Mard'or, einfache, zu 7 fl. 20 kr.,
„ „ doppelte, zu 14 fl. 40 kr.;

γ) fremde in Bayern kursirende:

österreichische und holländische Dukaten zu 5 fl. 30 kr. bis 5 fl. 36 kr. kursirend,

Friedrichsd'or: sächsische, preußische, braunschweigische, hannöverische, dänische, auch Pistolen und öfters Louisd'or genannt, zu 9 fl. 29 kr. bis 9 fl. 38 kr.,

französische 20 Frankenstücke zu 9 fl. 24 kr. bis 9 fl. 26 kr.,

österreichische (lombardisch-venetianische) Souverains zu 16 fl. 24 kr. bis 16 fl. 34 kr.,

ältere französische Louisd'or zu 11 fl.

b) Silbermünzen,

α) gegenwärtig in Bayern geprägte:

Vereinsthaler und Geschichtsthaler, gesetzmäßig zu 3 fl. 30 kr.,

2-, 1-, ½-Guldenstücke,

6-, 3-, 1-Kreuzerstücke;

β) früher in Bayern geprägte, noch kursirende:

Kronenthaler zu 2 fl. 42 kr. kursirend,

bayerische Konventions- oder Speziesthaler zu 2 fl. 24 kr.,

½ Konventionsthaler zu 1 fl. 12 kr.,

¼ Konventionsthaler zu 36 kr.,

Kopfstücke zu 24 kr.,

½ Kopfstücke zu 12 kr.;

γ) fremde in Bayern kursirende:

Brabanter Kronenthaler, französische Laubthaler zu 2 fl. 42 kr. kursirend,

½ Kronenthaler zu 1 fl. 20 kr.,

¼ Kronenthaler zu 39 kr.,

Konventionsthaler zu 2 fl. 24 kr.,

Kopf- und halbe Kopfstücke zu 24 kr. und 12 kr.,

französische 5-Frankenthaler zu 2 fl. 20 kr.,

preußische Thaler zu 1 fl. 45 kr.,

⅓, ⅙ preußische Thaler im Verhältniß.

8) Theilung einiger in Bayern kursirender Münzen:

Der Gulden wird gerechnet zu 2 halben Gulden, 3 Zwanziger (3mal 20 kr.), 4 Fünfzehner, 5 Zwölfer, 6 Zehner, 10 Sechser, 15 Batzen (4 kr.), 20 Groschen, 24 Landmünzen (2½ kr.), 30 halbe Batzen, 60 Kreuzer, 240 Pfennigen, 480 Heller;

der halbe Gulden: 5 Sechser, 10 Groschen, 30 kr. ꝛc.;

der Vierundzwanziger oder das Kopfstück: 4 Sechser, 8 Groschen, 24 Kreuzer; — 5 Vierundzwanziger geben 2 fl.;

der Zwölfer: 2 Sechser, 4 Groschen, 12 Kreuzer; — 5 Zwölfer geben 1 fl.;

der Kronenthaler: 2 fl. 42 kr., 27 Sechser, 162 Kreuzer; — 10 Kronenthaler geben 27 fl.;

der halbe Kronenthaler: 1 fl. 20 kr., 80 kr.; — 3 halbe Kronenthaler = 4 fl.;

der Konventionsthaler: 2 fl. 24 kr., 6 Vierundzwanziger, 12 Zwölfer, 24 Sechser, 144 Kreuzer; 5 Konv.-Thlr. = 12 fl.;

der preußische Thaler: 1 fl. 45 kr., 7 Fünfzehner, 35 bayer. Groschen, 30 Silbergroschen, 105 Kreuzer; 4 preuß. Thlr. = 7 fl., 2 preuß. Thlr. = 1 Vereinsthaler;

der Fünffrankenthaler: 2 fl. 20 kr.; 3 Fünffranken-Thlr. = 7 fl. = 4 preuß. Thlr. = 2 Vereins-Thlr.

Zweite

Zweite Abtheilung,

enthaltend

die Benennung, die Eintheilung und die Vergleichung neuerer Masse und Gewichte auswärtiger Staaten mit den neueren französischen und bayerischen, dann Eintheilung und Werthbestimmung der neueren Münzen nach dem 24½ Gulden-, 14 Thaler- und 24 Guldenfusse.

I. Tabelle.

Werkmaße.

Namen der Länder und Städte.	Namen der Maße.	Millimeter.	Vergleichungs-Logarithmus.	100 auswärtige sind gleich x bayerischen.
Baden	Fuß = 0,3 Meter	300	2,4738802	102,79
Bayern	Fuß	291,859	2,4651732	100
Belgien . . .	Meter	1000	3,0000000	342,63
Braunschweig .	Fuß	285,362	2,4554113	97,7
Bremen . . .	Fuß	289,35	2,4614235	99,14
Coburg	Fuß	303,97	2,4828307	104,15
Dänemark . .	Fuß	313,8535	2,4967498	107,5
Frankfurt a. M.	Fuß	284,61	2,4542502	97,51
Frankreich . .	Meter	1000	3,0000000	342,63
	alt. Pariser Fuß	324,839	2,5116682	111,3
Gotha	Fuß	287,618	2,4588161	98,55
Griechenland .	Piki = Meter	1000	3,0000000	342,63
Großbritannien	Foot	304,7945	2,4840071	104,432
Hamburg . . .	Fuß	286,57	2,4572307	98,16
Hannover . . .	Fuß	292,095	2,4655242	100,8
Hessen-Darmstadt	Fuß = ¼ Meter	250	2,3979400	85,66
" Kassel .	Fuß	287,699	2,4589384	98,575
Lomb.-venet. Kgr.	Piede, alter	435,185	3,0000000	342,63
Lübeck	Fuß	287,618	2,4588161	98,5
Lucca	Fuß	589,9	2,7707784	202,12
Meiningen . .	Fuß	283,15	2,4520166	97,016
Modena	Piede, alter	523,05	2,7185432	179,2
Nassau	Fuß	287,5	2,4586378	98,44
Neapel	Palmo	264,55	2,4225078	94,643
Niederlande .	neue Elle = Meter	1000	3,0000000	342,63
	Rode = Dekameter	10000	4,0000006	3426,3
Oesterreich. Staaten	Fuß	316,103	2,4998277	108,31
Oldenburg . .	Fuß	295,88	2,4711156	101,38
Parma	Braccio di legno	545,516	2,7368075	186,9
Polen	Fuß (Stopa)	288	2,4593925	98,677
Portugal . . .	Baufuß (Pé)	338,6	2,5296870	116,1
Preußen . . .	Fuß	313,854	2,4719017	107,54
Rom	Bau-Canna	2233,27	2,3489417	765,19
Rußland . . .	Fuß	304,8	2,4840581	104,43
Sachsen, Königreich	neuer Fuß = 0,3 Meter	300	2,4738802	102,789
Sardinien . .	Palmo	249,095	2,3963650	85,5
Schweden . . .	Fuß	296,867	2,4725620	101,71
Schweiz (12 Kantone)	neuer Fuß = 0,3 Meter	300	2,4738802	102,789
Sizilien . . .	Palmo	258,098	2,4117846	88,432
Spanien . . .	Pie	278,33	2,4445600	95,364
Toskana . . .	Canna	2334,6	3,3682125	765,5
Türkei	Halebi = Arschin	708,647	2,8504390	242,8
Weimar . . .	Fuß	281,97	2,4502060	96,6
Würtemberg .	Fuß	286,57	2,4572307	98,16

Namen der Länder und Städte.	Namen der Maße.	Millimeter.	Vergleichungs-Logarithmus.	100 auswärtige sind gleich x bayerischen.
Einige ältere Maße.				
Ansbach	Fuß	299,56	2,4764838	102,64
Augsburg . . .	Fuß	296,168	2,4715382	101,48
Nürnberg (Bamberg)	Fuß	303,975	2,4828379	104,11
Regensburg . .	Fuß	313,5603	2,4963211	107,4
Würzburg . . .	Fuß	292,626	2,4663132	100,26

Anmerk. 1. Die 12 Schweizer-Kantone, welche sich unterm 17. August 1835 zu einem Konkordate über Annahme der Badener Maß- und Gewichtsordnung vereinigt haben, sind: Aargau, Basel, Bern, Freiburg, Glarus, Luzern, St. Gallen, Schaffhausen, Solothurn, Thurgau, Zürich und Zug.

Anmerk. 2. In der Lombardei, Modena und Parma gilt auch noch das französische metrische Maß- und Gewichtsystem.

Anmerk. 3. Die letzte Spalte ist z. B. in Beziehung auf Baden zu verstehen: 100 bad. Fuß = 102,79 bayer.

II. Tabelle.

Ellenmaße.

Baden	Elle = 0,6 Meter	600	2,7781513	72,03
Bayern	Elle	833,01	2,9206503	100
Belgien	Meter	1000	3,0000000	120,04
Braunschweig .	Elle	570,73	2,7564307	68,514
Bremen	Elle	578,7	2,7624535	69,47
Coburg	Elle	586,3	2,7681125	70,38
Dänemark . .	Alen	627,7	2,7977571	75,35
Frankfurt a. M.	Frankfurter Elle	547,3	2,7382254	65,7
	Brabanter Elle	699,2	2,8446014	83,94
	Pariser Stab	1182	3,0726175	141,9
Frankreich . .	Meter	1000	3,0000000	120,04
Griechenland .	Pik	685,8	2,8361975	82,328
Gotha	Elle	562,64	2,7502306	67,54
Großbritannien	Yard	914,38	2,9611267	109,77
Hamburg . . .	Hamburger Elle	573,11	2,7582607	68,7
	Brabanter Elle	687,77	2,8374432	82,564
Hannover . . .	Elle	584,19	2,7665541	70,13
Hessen-Darmstadt	Elle	547,7	2,7385427	65,74
„ Kassel .	Kasseler Elle	570,4	2,7561795	68,475
	Brabanter Elle	694,3	2,8415472	83 35
Lomb.-venet. Kgr.	Braccio	594,94	2,7744732	71,95
Lucca	Seiden-Elle	577,7	2,7617024	69 35
Lübeck	Elle	575,24	2,7598415	69,054
Meiningen . .	Elle	635,9	2,8033888	76,34
Modena . . .	alte Braccio	633,15	2,8015066	76
Nassau	Elle	555,5	2,7446841	66,69

Namen der Länder und Städte.	Namen der Maße.	Millimeter.	Vergleichungs-Logarithmus.	100 auswärtige sind gleich x bayerischen.
Neapel	Canna	2645,5	3,4225078	317,58
Niederlande .	Meter = 10 Palmen	1000	3,0000000	120,04
Oesterreich . .	Elle	779,2	2,8916538	93,54
Oldenburg . . .	Elle	580,9	2,7641014	69,73
Parma	Seiden-Braccio	587,75	2,7691963	70,558
Polen	Lociek	576	2,7604225	69,15
Portugal . . .	Vara	1100	3,0413927	132,05
	Covado	660	2,8195439	79,23
Preußen . . .	Elle	666,938	2,8240855	80,06
Rom	Canna	2001,6	3,3016244	240,28
Rostock (Mekl.-Schw.)	Elle	575,4	2,7599699	69,07
Rußland . . .	Arschin	711,2	2,8519917	85,37
Sachsen . . .	Leipziger Elle	565,3	2,7522799	67,86
	Brabanter Elle	685,6	2,8360708	82,3
Sardinien . . .	Raso	599,39	2,7777095	71,95
Spanien . . .	kastil. Vara	835	2,9216865	102,2
Schweden . . .	Aln	593,7	2,7735670	71,28
Schweiz (neu) .	Elle	600	2,7781513	72,03
Toskana . . .	Braccio	583,65	2,7661525	70,065
Türkei	Pik für Seide	685,79	2,8361911	82,326
	Endasch	652,5	2,8145804	78,33
Weimar	Elle	563,96	2,7512483	67,7
Würtemberg .	Elle	614,2	2,7883098	73,74

Einige ältere Masse.

Amberg	Elle	835,108	2,9217406	100,25
Ansbach	Elle	623,77	2,7954413	74,953
Augsburg . . .	große Elle	606,37	2,7827377	72,792
	kleine Elle	586,52	2,7682828	74,41
Bamberg . . .	Elle	667,7	2,8245814	80,156
Nürnberg . . .	Elle	656,4	2,8171686	78,8
Regensburg . .	Elle	810,03	2,9085011	97,241
Würzburg . . .	Elle	586,29	2,7681126	70,382

Anmerk. Vergl. die Anmerkungen zur I. Tabelle.

III. Tabelle.

Meilenmaße.

Namen der Länder.	Namen des Maßes.	Solche Meilen haben Meter.	Solche Meilen haben geogr. Meil.	Gehen auf einen Meridiangrad.
Baden	Meile	8888,9	1,2	12,5
Bayern	Meile	7415	1,0008	14,98
Belgien . . .	Meile	10000	1,35	11,11
Braunschweig .	Meile	7419,4	1,0016	14,976
China	Li	575,5	0,0777	193
Dänemark . .	Meile	7532,48	1,0169	14,75
Darmstadt . .	Meile	7500	1,0125	14,815
Deutschland .	deutsche oder geographische Meile	7407,41	1	15
England . . .	gesetzmäßige (British-Mile)	1609,32	0,2173	69,04
	gewöhnl. engl. London-Mile)	1523,97	0,2294	72,91
	Seemeile	1851,85	0,25	60
Frankreich . .	ältere Lieue	4444,4	0,6	25
	" "	5555,5	0,75	20
	Seemeile	1851,85	0,25	60
	neuere M. (Dezimalgrad = Myriameter)	100000	13,5	1,11
Hamburg . . .	Meile	7532,5	1,0169	14,75
Hannover . . .	Meile	7419,2	1,0016	14,976
Lomb.-venet. Kgr.	Miglio	10000	1,35	11,11
Neapel	Miglio	1851,85	0,25	60
Niederlande .	Meile	10000	1,35	11,11
Oesterreich . .	Postmeile	7586,7	1,024	14,64
Persien	Farsang	5555,5	0,75	20
Portugal . . .	kleine Meile (Milha)	2005,65	0,279	53,79
	große Meile (Legoa)	6196,96	0,837	17,9
Preußen . . .	Meile	7532,485	1,0169	14,75
Rußland . . .	Werst	1066,8	0,144	104,5
Sachsen, Königreich	Polizei-(Post-)Meile	9062	1,22	12,28
Sizilien . . .	Miglio	1486,6	0,2007	74,74
Toskana . . .	Miglio	1653,67	0,2232	67,19
Spanien . . .	Legua nueva	6680	0,9	16,633
	Legua geografica	6349,2	0,87	17,5
	Legua maritima	5555,5	0,75	20
Türkei	Agatsch	533,4	0,7	20,83

IV. Tabelle.
Getränkmaße.

Namen der Länder und Städte.	Benennung und Eintheilung der Maße.	Liter.	bayer. Maß-kannen.
Baden	Ohm, 10 Stützen, 10 Maß, 10 Gläser	150	140
Bayern	Schenk-Eimer, 60 Maß, 4 Quart	64,1416	60
	Visir-Eimer, 64 Maß, 4 Quart	68,4177	64
Belgien . . .	Baril (Hektolitre) = 100 Litron à 10 Verre	100	93,54
Braunschweig .	Orthoft, 60 Stübchen, 4 Quartier	224,83	210,3
Bremen	Ahm, 45 Stübchen, 8 Quart, 4 Mingeln	144,96	135,6
Coburg	Eimer = 80 Maß . . .	77,345	72,348
Dänemark . . .	Ohm = 4 Anker à 19⅝ Kannen oder 38¾ Pott	149,75	140,1
Frankfurt a. M.	Ohm, 20 Viertel oder 80 Altmaß oder 90 Jungmaß, jedes der letzteren = 4 Schoppen	143,43	134,17
Frankreich . .	Hektoliter, 10 Dekaliter, 10 Liter ꝛc.	100	93,54
Gotha	Eimer, 40 Kannen, 2 Maß, 2 Nössel	72,769	68,07
Griechenland .	königl. Hektoliter	100	93,54
Großbritannien	Imperial-Gallon, 4 Quarts, 4 Pints	4,54346	4,25
Hamburg . . .	Ohm, 4 Anker oder 5 Eimer, od. 20 Viertel od. 40 Stübchen	144,81	135,46
Hannover . . .	Ohm, 4 Anker, 10 Stübchen, 2 Kannen	155,76	145,7
Hessen-Darmstadt	Ohm, 20 Viertel, 4 Maß, 4 Schoppen	160	149,35
„ Kassel .	Deßgleichen	155,96	145,89
Lomb.-venet. Kgr.	Soma = Hectolitre, 100 Pinte (Litre)	100	93,54
Lübeck	Ohm, 20 Viertel, 2 Stübchen, 2 Kannen, 2 Quartier, 2 Planken	145,5	136,1
Meiningen . .	Ohm, 2 Eimer, 32 Schenkmaß	65,45	61,224
Modena	s. Lomb.-venet. Königr. .		
Nassau	Ohm, 20 Viertel, 4 Maß, 4 Schoppen	135,58	126,81
Neapel	Barile, 60 Caraffe	43,625	40,806
Niederlande .	Vat = Hectolitre, 100 Kan, 10 Maatje	100	93,54
Oesterreich . .	Wein-Eimer, 40 Rechnungsmaß	58,02	54,27
	Bier-Eimer, 42⅜ Maß . .	59,88	56,256
Oldenburg . .	Anker, 26 Weinkannen, 4 Ort	35,586	33,287
Parma	Brenta = 72 Boccali . .	72	67,35
Polen	Beczka, 25 Garnici, 4 Kwarti	100	93,54

Namen der Länder und Städte.	Benennung und Eintheilung der Maße.	Liter.	bayer. Maßkannen.
Portugal . . .	Pipa, 26 Almudas, 2 Potes, 2 Canhados	435,29	407,18
Preußen . . .	Eimer, 60 Quart	68,702	64,266
Rom	Wein-Barilo, 4½ Rubbi .	45,51	42,576
	Oel-Barilo	53,11	49,68
Rußland . . .	Wedro, 4 Tschetwerki . .	12,299	11,496
Sachsen, Dresden	Eimer zu 48 Visirkannen oder 72 Schenkkannen à 2 Nößel; die Schenkkanne . . .	0,93559	0,875
„ Leipzig	Eimer zu 54 Visir- oder 63 Schenkkannen à 2 Nößel à 4 Quartier; die Schenkkanne	1,204	1,126
Sardinien . .	Wein-Carro, 10 Brente, 36 Pinte, 2 Boccali . . .	492,95	461
Schweden . . .	Wein-Ahm, 2 Eimer, 2 Anker, 15 Kannen, 2 Stoop . .	157,11	146,96
Schweiz (12 Kantone)	Saum = 100 Maß oder Pot	150	140
Sizilien . . .	Salma, 8 Barili, 2 Quartari, 20 Quartucci	270,09	252,64
Spanien . . .	Cantara (Aroba mayor) für Wein, 8 Azumbres . .	16,137	15,09
	Aroba menor für Oel . .	12,564	11,75
Toskana . . .	Wein-Barile, 20 Fiaschi, 2 Boccali	45,584	42,64
	Oel-Barile, 16 Fiaschi . .	33,43	31,27
Türkei	Alma (für Oel 8 Oke wiegend)	5,2047	4,869
Weimar . . .	Eimer, 72 Maß, 2 Nößel .	73,3	68,568
Würtemberg .	Eimer Helleich, 16 Imi, 10 Maß	293,33	274,95
Einige ältere Maße.			
Ansbach u. Baireuth	Eimer, 66 Maß, 2 Seidel, 2 Schoppen	89,225	83,46
Augsburg . . .	Visir-Eimer = 64 Visir-Maß; 1 Maß hatte	1,1772	1,1012
	Schenk-Eimer = 72 Schenk-Maß; 1 Maß hatte . .	1,0485	0,9808
Bamberg . . .	Wein-Eimer, 64 Aich- oder fünische Maß; 1 Maß .	1,471	1,3759
	Schenk-Eimer, 72 Schenk-Maß; 1 Maß	1,349	1,2626
Nürnberg . . .	Eimer, 68 Schenk-Maß, 4 Schoppen; 1 Maß	1,0785	1,0089
Regensburg . .	Bier-Eimer, 64 Köpfl . .	53,32	49,877
	Berg-Eimer, 68 Köpfl . .	56,653	52,993
	Wein-Eimer, 88 Köpfl . .	73,315	68,579
	Köpfl	0,83313	0,779
Würzburg . . .	Maß	1,0745	1,005

Anmerk. Obige Angaben sind zu lesen, z. B. bei Baden: 1 Ohm hat 10 Stützen, 1 Stütze 10 Maß, 1 Maß 10 Gläser; 1 Ohm hat 150 französische Liter oder 140 bayerische Maßkannen.

V. Tabelle.
Fruchtmaße.

Namen der Länder und Städte.	Benennung und Eintheilung der Maße.	Liter.	bayer. Metzen.
Baden	Malter, 10 Sester, 10 Mäßlein	150	4,0474
Bayern	Schäffel, 6 Metzen, 4 Viertel, 4 Mäßel, 4 Dreißiger .	222,36	6
Belgien	Rasière (Hectolitre), 10 Boisseau (Decal.), 10 Litron (Litre), 10 Mesurette (Decil.)	100	2,69838
Braunschweig .	Wispel, 40 Himten, 4 Vierfaß, 4 Metzen; 1 Himten . .	31,145	0,8404
Bremen . . .	Schäffel, 4 Viertel, 4 Spind	74,104	2
Coburg	Simmer, 4 Viertel, 4 Metzen für glatte Frucht . . .	88,946	2,4
	Deßgleichen für rauhe Frucht	110,45	2,98
Dänemark . .	Korntonne, 8 Schäffel, 4 Viertel, 2 Achtel	139,12	3,752
Frankfurt a. M.	Malter, 4 Simmer, 4 Sechter, 4 Gescheid, 4 Mäßchen .	114,74	3,096
Frankreich . .	Hektoliter, Dekaliter, Liter ꝛc.	100	2,698
	Boisseau	13,008	0,351
Gotha	Malter, 2 Schäffel, 2 Viertel, 4 Metzen	174,74	4,712
Griechenland .	Alter Kilo	33,148	0,8947
	Königl. Kilo = Hektoliter	100	2,698
Großbritannien	Last, 2 Weys, 5 Quarters, 8 Buschel; der Quarter . . .	290,78	7,846
Hamburg . . .	Schäffel, 2 Faß, 2 Himten, 4 Spint, 4 (große) Maß	105,47	2,846
Hannover . . .	Malter, 6 Himten, 4 Metzen	186,91	5,04
Hessen-Darmstadt	Malter, 4 Simmer, 4 Kumpf, 4 Gescheid	128	3,454
Mainz	Malter, 4 Viernsel, 4 Kumpf, 4 Gescheid	109,387	2,952
Hess.-Kassel (Stadt)	Viertel, 2 Schäffel od. 16 Metzen à 4 Mäßchen . . .	160,74	4,339
Lomb.-venet. Kgr.	Mina, 28 Moggia, 8 Staja, 4 Quartari	146,23	3,946
	Neues gesetzliches Maß das franz.		
Lucca	Stajo (Schäffel)	24,52	0,6618
Lübeck	Schäffel für glatte Frucht, 4 Faß	34,694	0,936
	Hafer-Schäffel	39,514	1,066
Meiningen . .	Malter, 4 Metzen, 2 Maß .	167,1	4,509
Nassau	Malter, 4 Viernsel, 4 Kumpf	109,6	2,957
Neapel	Tomolo, 2 Mezzetti, 2 Quarti, 6 Misure	55,545	1,4988
Niederlande .	Last, 30 Mudden (Hektol.), 10 Scheppel (Dekal.), 10 Kop (Liter); 1 Mudde oder Sack	100	2,698
Oesterreich . .	Metzen, 4 Viertel, 2 Achterl, 2 Maßel	61,5	1,6596
Oldenburg . .	Gemeiner Schäffel, 16 Kannen, 4 Ort (8 Schäffel = 1 Tonne)	22,8	0,6138

Namen der Länder und Städte.	Benennung und Eintheilung der Maße.	Meter.	bayer. Metzen.
Parma	Staro, 16 Quartarole . . .	48	1,295
Polen	Korzek, 4 Viertel, 8 Garnitz	128	3,454
Portugal	Fanga, 8 Alqueiros, 4 Quartos	55,363	1,454
Preußen . . .	Schäffel, 16 Metzen, 3 Quart	54,96	1,483
Rom	Rubbio, für glatte Frucht 4 Quartos	267,24	7,21
	Rubbio, für Hafer 14⅖ Scorzi	246,19	6,643
Rostock (Mekl. Schw.)	Kornschäffel	38,889	1,049
Rußland . . .	Tschetwert, 2 Osmin, 2 Pajok	209,74	5,64
Sachsen, Dresden	Schäffel, 4 Viertel, 4 Metzen, 4 Mäßchen	105,143	2,837
Sardinien . .	Sacco, 5 Emine, 8 Koppi, 24 Cuchiari	115,03	3,104
Schweiz . . .	Quarteron oder Viertel . .	150	4,047
Schweden . . .	Getreidtonne	164,84	4,448
Sizilien . . .	Salma, 16 Tumoli, 4 Mondelli, 4 Carozzi, 4 Quarti . .	275,09	7,423
Spanien . . .	Cahiz, 12 Faregas, 4 Cuartillos	657,6	17,744
Toskana . . .	Stajo, 2 Mine, 2 Quarti, 2 Mezzetti	24,303	0,658
Türkei	Fortin, 4 Kilo	141,06	3,779
Weimar . . .	Schäffel, 4 Viertel, 4 Mäßel	76,965	2,076
Würtemberg .	Schäffel, 8 Simri, 4 Vierling, 8 Ecklein	177,23	4,783

Einige ältere Maße.

Amberg	Metzen	11,2302	0,303
Ansbach	Korn-Simmer, 16 Metzen, 16 Maß	337,1	9,117
	Hafer-Simmer, 32 Metzen, 18 Maß	622,33	16,79
Augsburg . . .	Schaff, 8 Metzen, 4 Vierling, 16 Mäßle	205,3	5,54
Baireuth . . .	Simra, 16 Maß, für glatte Frucht	495,91	13,38
	Deßgleichen für rauhe Frucht	494,1	13,333
Bamberg . . .	Simmer, 4 Metzen, 10 Geisel, für glatte Frucht . . .	77,753	2,098
	Deßgleichen für rauhe Frucht	96,236	2,597
Eichstädt . . .	Schäffel zu 16 Metzen für glatte Frucht	599,9	16,187
	Schäffel zu 19 Metzen für Gerste	722,4	19,223
Nürnberg . . .	Korn-Simmer, 16 Metzen, 16 Maß	318,14	8,686
	Hafer-Simmer, 4 Malter, 32 Metzen	588,35	15,88
Regensburg . .	Korn-Schaf, 32 Metzen . .	586,52	15,826
	Hafer-Schaf, 56 Metzen .	1026,4	27,696
Würzburg . . .	Metzen Korn	21,71	0,5858
	Metzen Hafer	35,27	0,9517

Anmerk. Unter glatter Frucht versteht man gewöhnlich Waizen und Roggen, unter rauher Frucht Gerste, Hafer, manchmal auch Dinkel.

VI. Tabelle.
Gewicht.

Namen der Länder und Städte.	Benennung und Eintheilung des Gewichtes.	Grammes.	100 auswärtige (Pfde.) sind = x bayer. Pfunden.
Baden	Stein, 10 Pfund, 10 Centas, 10 Dekas, 10 As; 1 Pfd. hat	500	89,285
Bayern	Handelspfund	560	100
Braunschweig .	Pfund	467,711	83,52
Bremen . . .	Handelspfund (116 Pfund = 1 Zentner	498,5	89,018
Coburg	Handelspfund	509,996	91,07
Dänemark . .	Handelspfund	500	89,285
Frankfurt a. M.	Schwergewicht: Ztr., 100 Pfd.; 1 Pfund	505,347	90,24
	Leichtgewicht: Ztr., 108 Pfd.; 1 Pfund	467,914	83,556
Frankreich . .	Kilogramm, 10 Hektogramm, 10 Dekagramm ꝛc. . . .	1000	178,57
	Aelteres Gewicht: Quintal, 100 Livres poids de marc, 2 Marcs, 8 Onces, 8 Drachmes; 1 Livre	489,506	87,484
Gotha	Handelspfd. (110 Pfd. = 1 Ztr.)	467,711	83,52
Griechenland .	Cantaro, 44 Oka, 400 Drachmen; 1 Oka	1278,48	228,49
	Königl. Mine à 1500 Drachmen	1500	267,86
Großbritannien	Handelspfund (Pound Avoir dupois) (Ztr., 100 Pfd., 16 Unzen, 16 Drachmen)	453,59	80,998
	Troy-Pfund (für edle Metalle, Juwelen, Droguen), 12 Unzen, 20 Pfenniggewicht, 24 Grän	373,24	66,65
Hamburg . . .	Handelspfund (112 Pfund = 1 Ztr.)	484,609	86,609
Hannover . . .	Handelspfund (100 Pfund = 1 Ztr.)	467,711	83,52
Hessen-Darmstadt	Handelspfund	500	89,285
" Kassel .	Pfund Schwergewicht (108 Pf. = 1 Ztr.)	484,24	86,47
	Pfund Leichtgewicht (108 Pfd. = 1 Ztr.	467,8	83,605
Lombard.-venet. Königreich	Libbra metrica (Kilogramme), 10 Once, 10 Grossi, 10 Denari	1000	178,57
	Schwer Handelsgew. Libbra, 28 Once, 24 Denari . .	762,517	136,2
	Leicht Handelsgew. Libbra, 12 Once, 24 Denari . .	326,79	58,36
Lübeck	Pfund (112 Pfd. = 1 Ztr.)	484,7	86,56
Lucca	Handelsgew. Libbra, 12 Once, 24 Denari	334,5	59,94
Meiningen . .	Handelspfund	509,996	91,07

Namen der Länder und Städte.	Benennung und Eintheilung des Gewichts.	Grammes.	100 auswärtige (Pfde.) sind = x bayer. Pfunden.
Modena	Außer dem metr. Gewichte noch Libbra, 12 Once, 12 Ferlini	340,457	60,8
Nassau	Das leichte Pfund . . .	470,686	84,05
Neapel	Libbra, 12 Once, 30 Trappesi	320,759	57,28
Niederlande .	Pond (Kilogr.), 10 Ons (Hectogr.), 10 Load (Dekagr.), 10 Wigtje (Gramme) . .	1000	178,57
Oesterreich . .	Pfund (Ztr. = 5 Stein = 100 Pfd. = ¼ Karch) . . .	560,012	100,002
Oldenburg . .	Pfund (10 Pfd. = Liespfund)	480,367	85,85
Parma	Libbra, 12 Once, 24 Denari, 24 Grani	328	58,57
Polen	Handelspfund	405,504	72,41
Portugal . . .	Quintal, 128 Arratel, 2 Meios, 8 Onças; 1 Arratel . .	459	81,96
Preußen . . .	Pfund (110 Pfd. = 1 Ztr.)	467,711	83,52
Rom	Lira, 12 Oncie, 24 Denari, 24 Grani	339,161	60,56
Rostock	Handelspfd. (112 Pfd. = 1 Ztr.)	484,609	86,609
Rußland . . .	Pfund, 32 Loth, 3 Solotnik	409,517	73,13
Sachsen, Königreich	Ztr., 10 Halbstein, 10 Pfd., 10 Kilas, 10 Hektas, 10 Dekas; ein Pfund . . .	500	89,285
Dresden (alt)	Pfund	467,086	83,408
Sardinien . .	Lira, 12 Once, 8 Ottavi, 3 Denari, 24 Grani	368,845	65,87
Schweiz (12 Kantone)	Pfund	500	89,285
Spanien . . .	Libra, 4 Quarterones, 4 Onzas	460,135	82,17
Toskana . . .	Handelspfund, 12 Once, 24 Denari, 24 Grani	339,542	60,63
Türkei	Cantaro = 44 Oke oder 100 Rottel; 1 Oka	1278,48	228,49
Weimar . . .	Pfund (110 Pfd. = 1 Ztr.)	467,711	83,52
Würtemberg . .	Pfund (104 Pfd. = 1 Ztr.)	467,711	83,52
Zollvereinsstaaten	Zollzentner, 100 Pfd, 30 Loth; 1 Zollpfund = ½ Kilogr. .	500	89,285
	Vereins-Münzmark (preuß.)	233,855	99,96*
Einige ältere Gewichte.			
Ansbach	s. Nürnberg		
Augsburg . . .	Pfund Leichtgewicht . . .	472,423	84,361
	Pfund Schwergewicht . .	490,874	87,656
	Silbergewicht (noch erlaubt): Pfund, 2 Mark, 16 Loth, 4 Qt., 4 Pfennig; eine Mark .	235,924	100,88*
Baireuth . . .	s. Nürnberg		
Bamberg . . .	Pfund Leichtgewicht . . .	468,384	83,64
Nürnberg . . .	Handelspfund	509,996	91,07
	Silbergewicht: Mark . .	238,83	102,016*
	Medizinalgewicht: Pfund .	357,85	99,4**
Regensburg . .	Handelspfund	566,917	101,23
	Mark Silbergewicht . . .	246,19	105,27*
Würzburg . . .	Handelspfund	477,226	85,29

* bayer. köln. Mark. ** bayer. Medizinalpfund.

Anmerk. 1. Die Eintheilung des Handelsgewichtes in Zentner, 100 Pfund, 32 Loth, 4 Quentchen ist als häufig vorkommend da hinweggelassen, wo sie eingeführt ist.

Anmerk. 2. Die Vereins-Münzmark ist mit der bayerisch-kölnischen, die Augsburger, Nürnberger und Regensburger Mark Silbergewicht mit der Vereinsmark, das Nürnberger Medizinalpfund mit dem bayerischen Medizinalpfunde in der letzten Spalte verglichen.

Anmerk. 3. Aus einer nähern Betrachtung obiger Tabelle ergibt sich, daß das in Braunschweig, Gotha, Hannover, Weimar und Würtemberg eingeführte Pfund mit dem preußischen; das in Coburg und Meiningen eingeführte, so wie das alte Ansbacher und Baireuther Pfund mit dem alten Nürnberger; das in Baden, Hessen-Darmstadt und Königreich Sachsen, so wie das in Dänemark und in 12 Schweizer-Kantonen eingeführte Pfund mit dem deutschen Zollpfunde = ½ Kilogramm übereinstimme. Als gesetzlich gestattete Vergleichungszahlen mit dem Zollpfunde gelten:

14 Zollpfunde = 15 preußische, = 15 kurhessische, = 15 würtembergische, = 12½ altbayerische.

VII. Tabelle.

Rechnungs-, Silber-, Gold- und Papier-Geld.

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im: 24 1/2 Guldenfuß.			14 Thalerfuß oder preußisch Cour.			24 Guldenfuß.		
		fl.	kr.	Pf.	Thlr.	Sgr.	Pf.	fl.	kr.	Pf.
	Anhaltische Herzogthümer									
rechnen	jetzt nach Thaler (zu 30 Sgr., zu 12 Pfge.)	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43
Silber.	Seit 1839: Vereinsmünze	3	30	—	2	—	—	3	25	2,95
	Früher: Speciesthaler . .	2	27	—	1	12	—	2	24	—
	Ausbeutethaler . .	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43
	Baden									
rechnet	(wie Bayern) nach Gulden (zu 60 kr., zu 4 Pf.)									
Silber.	Seit 1837 wie Bayern.									
	Früher: auch Thalerstücke zu 100 kr.	1	39	3,3	—	28	6,2	1	36	3,09
	½, ¼, 1/10, 1/20, 3/100 Thalerstücke im Verhältniß.									
Gold.	Dukaten	5	36	—	3	7	—	5	29	0,57
	Von 1819—1827: 10 fl.-Stücke	10	6	0,7	5	25	—	9	52	2,15
	Von 1828: Dopp. Ludwigsd'or oder 10 Thalerstücke à 1000 kr.	16	50	1	9	21	8	16	28	21

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.	14 Thalerfuß oder preußisch Cour. Thlr.	Sgr.	Pf.	24 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.
	Bayern									
rechnet	seit 1837 nach Gulden (des $24\frac{1}{2}$ Guldenfußes) . . .	1	—	—	—	17	$1\frac{5}{7}$	—	58	3,1
	vordem nach Gulden (des 24 Guldenfußes) zu 60 kr., zu 4 Pf., zu 2 Heller . . .	1	1	1	—	17	6	1	—	—
Silber.	Seit 1837: 1 Guldenstücke .	1	—	—	—	17	$1\frac{5}{7}$	—	58	3,1
	$\frac{1}{2}$ Guldenstücke .	—	30	—	—	8	$6\frac{6}{7}$	—	29	1,5
	Seit 1838: Vereinsmünze und Geschichtsthaler . . .	3	30	—	2	—	—	3	25	2,8
	Seit 1845: 2 Guldenstücke .	2	—	—	1	4	3,4	1	57	2,2
	Vor 1837: Kronenthaler (à 2 fl. 42 kr. Cour.)	2	41	3,32	1	16	2,8	2	38	0,75
	Bayer. Konventions- oder Speziesthaler und auch Geschichtsthaler . .	2	27	—	1	12	—	2	24	—
	24 Kreuzerstücke	—	24	2	—	7	—	—	24	—
	$\frac{1}{2}$ Speciesthaler und 12 kr.-Stücke im Verhältniß.									
Gold.	Dukaten	5	36	—	3	7	—	5	29	0,67
	Früher: Karolinen à 11 fl.	12	13	1	7	1	8	11	58	1
	Mayd'or à $7\frac{1}{3}$ fl. .	8	8	3	4	21	1,5	7	58	3
Papier.	Noten der Hypotheken- und Wechselbank zu 10 fl. u. 100 fl.; im Cours wie Silbergeld.									
	Belgien									
rechnet	nach Francs (zu 100 Centimes)	—	28	1,15	—	8	0,98	—	27	5,75
Gold. Silber.	} s. Frankreich.									
Papier.	Banknoten zu 50, 100, 500 u. 1000 Francs; im Werth wie Silbergeld.									
	Brasilien									
rechnet	(jetzt) nach Milreïs (zu 1000 Reïs)	2	5	0,16	1	5	8,7	2	2	2,2
	Reï als Kupfermünze . .	—	—	0,2916	—	—	0,24	—	—	0,28
	Braunschweig									
rechnet	seit 1835 nach Thalern (zu 24 Ggr., zu 12 Pf.) . .	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43
Silber.	Seit 1835: Thalerstücke .	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43
	$\frac{1}{6}$ Thalerstücke oder 4 Ggr. . .	—	17	2	—	5	—	—	17	0,5
	Guldenstücke .	1	21	2,6	—	23	4	1	19	3,4
Gold.	Pistolen . . .	9	41	2,2	5	17	10,7	9	28	1,66
	Dukaten . . .	5	34	3,3	3	6	7,9	5	27	1,8

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.	14 Thalerfuß oder preußisch Cour. Thlr.	Sgr.	Pf.	24 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.
	Bremen									
rechnet	nach pr. Friedrichsd'or (5 Thlr. Gold)	9	48	3,4	5	20	—	9	34	2
	und nach Pistolen (zu 5 Thlr. Gold)	9	41	0,4	5	17	9,1	9	28	—
	Der Goldthaler zu 72 Grote à 5 Schwaren. (Diese Goldwährung ist gegen Silbergeld von veränderlichem Werth.)									
Silber.	Seit 1840: 36 Grotestücke oder ½ Goldthaler	—	55	0,5	—	15	0,9	—	53	3,27
	12 Grotestücke oder ⅙ Goldthaler	—	18	1,5	—	5	3	—	17	3,81
	6 u. 1 Grotestück im Verhältniß.									
	China									
rechnet	nach Thäl, zu 10 Mäs, zu 10 Candarin, zu 10 Casch (Li) .	3	35	1,8	2	1	6,7	3	30	1,6
	Dänemark									
rechnet	nach Reichsbankthaler (zu 6 Rbk. Mark, zu 16 Rbk. Schillinge)	1	19	1,8	—	22	1,8	1	17	1,9
	und auch nach Reichsthaler in wirkl. Species	2	38	3,68	1	15	4,86	2	34	3,8
	Der Reichsthaler zu 6 Mark à 16 Schill. dänisch oder auch 4 Ort à 24 Schilling.									
Silber.	Seit 1813: Ein Reichsthaler Species	2	38	3,68	1	15	4,86	2	34	3,8
	½ Species oder 1 Reichsbankthaler	1	19	1,84	—	22	8,43	1	17	1,9
	⅙ Species oder 32 Reichsbankschillinge	—	26	1,95	—	7	6,81	—	25	3,3
	1/12 und 1/24 Species im Verhältniß									
	Für Lauenburg seit 1830: ⅔ Thalerstücke	1	21	2,6	—	23	4	1	19	3,4
Gold.	Seit 1827: Einfache Frederiks- und neue Christiansd'or	9	40	3,4	5	17	8,3	9	26	2,8
	Doppelte Frederiks- und neue Christiansd'or	19	21	2,9	11	5	4,7	18	53	1,6
	Früher: Speciesdukaten .	5	33	2,5	3	6	3,8	5	26	0,37
	Courantdukaten .	4	26	1,4	2	16	10,7	4	20	1,2
Papier.	Reichsbankthaler in Zetteln = ½ Speciesthaler in Silber									

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß.			14 Thalerfuß oder preußisch Cour.			24 Guldenfuß.		
		fl.	kr.	Pf.	Thlr.	Sgr.	Pf.	fl.	kr.	Pf.
	England, Irland und Schottland (Großbritannien.)									
rechnen	nach Pfund Sterling (zu 20 Schilling St., zu 12 Pence St.)	11	54	3	6	26	4,2	11	38	2,5
	(Das Pfund Sterling ist eine Goldwährung und daher gegen Silbergeld von veränderl. Werth.)									
Silber.	Vor 1817: Schilling Sterl. (zu 12 Pence St.) . . .	—	35	—	—	10	—	—	34	0,85
	Krone (Crown) (zu 5 Schilling St.)	2	55	—	1	20	—	2	51	0,2
	Seit 1817: Schilling (zu 12 Pence St.)	—	32	3,5	—	9	4,7	—	32	0,55
	Krone (zu 5 Schill.) . .	2	44	1,6	1	16	11,6	2	40	3
	½ Krone, ½, ⅓, ¼, ⅛, 1/12 Schill. im Verhältniß.									
Gold.	Vor 1817: Guinea (zu 21 Schill. St.)	12	30	2	7	6	8	12	14	27,7
	5fache, doppelte, ½, ¼ und ⅛ im Verhältniß.									
	Seit 1817: Sovereign (Pfundstücke zu 20 Schill.) .	11	54	3	6	26	4,2	11	38	2,5
	5fache, doppelte, ½, ¼ und ⅛ im Verhältniß.									
Papier.	Banknoten von 5 bis 1000 Pfd. Sterl.									
	Frankfurt a. Main									
rechnet	nach Gulden (wie Bayern)	1	—	—	—	17	1 5/7	—	58	2,6
Silber.	Seit 1837 und 1838: 1, ½, 3½ Guldenstücke, wie Bayern.									
	Seit 1845: 2 Guldenstücke.									
	Vor 1837: Konventions-Speciesthaler	2	27	—	1	12	—	—	2	24
	½, ¼ Conv.-Speciesthaler im Verhältniß.									
Gold.	Dukaten	5	36	—	3	7	—	5	29	0,57
	Frankreich									
rechnet	nach Francs (zu 10 Decimen, zu 10 Centimen)	—	28	1,147	—	8	0,98	—	27	2,87
Silber.	Seit 1795: 1 Francstück .	—	28	1,147	—	8	0,98	—	27	2,87
	5 Francstücke	2	21	1,7	1	10	4,91	2	18	2,35
	2 Fr.-, ½ Fr.-, ¼ Fr.-Stücke im Verhältniß.									
Gold.	Seit 1795: 20 Francsstücke	9	26	3,3	5	13	7,7	9	14	3
	Stücke zu 100, 40 und 10 Fr. im Verhältniß.									

Art des Geldes.	Benennung der Länder und Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß.			14 Thalerfuß oder preußisch Cour.			24 Guldenfuß.		
		fl.	kr.	Pf.	Thlr.	Sgr.	Pf.	fl.	kr.	Pf.
	Griechenland									
rechnet	seit 1833 nach Drachmen zu 100 Lepta ...... von 1828—1833 nach Phönix zu 100 Lepta	—	25	1,3	—	7	2,83	—	24	1,75
	Früher nach spanischen Piastern	2	31	3,8	1	13	4,96	2	26	2,50
Silber.	Seit 1833: 1 Drachma- oder 100 Leptastück ...	—	25	1,3	—	7	2,83	—	24	1,75
	5 Drachmenstück ...	2	6	2,52	1	6	2,2	2	2	0,75
	½ und ¼ Drachmenstücke im Verhältniß.									
Gold.	Seit 1833: 20 Drachmenstück	8	26	2,1	4	26	6,3	8	8	3
Papier.	Banknoten zu 25 und 50 Drachmen und darüber im Werth wie Silbergeld.									
	Hamburg									
rechnet	nach Mark Banco zu 16 Schilling, zu 12 Pfennig ..	—	53	0,8	—	15	2,443	—	52	0,5
	Mark Courant (lübisch) ditto	—	43	0,9	—	12	4,23	—	42	1,4
	Reichsthaler Banco zu 48 Schill. Lübisch	2	38	3,7	1	15	4,86	2	35	2,5
	Reichsthaler Courant, 48 Sch.	2	9	2,8	1	7	0,71	2	6	3
Silber.	Doppelte Markstücke zu 32 Schill. Lüb. Cour. ..	1	26	1,9	—	24	8,47	1	24	2
	Markstücke zu 16 Schill. Lüb. Cr.	—	43	0,9	—	12	4,23	—	42	1
	½, ¼ und ⅛ Markstücke im Verhältniß.									
Gold.	Dukaten	5	33	2,5	3	6	3,8	5	26	0,47
	Hannover									
rechnet	seit 1834 nach Thaler zu 24 Ggr., zu 12 Pf.	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43
Silber.	Seit 1834: Thalerstücke .	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43
	⅙ und 1/12 Thalerstücke im Verhältniß.									
	Von 1816—1834: Gulden oder feine ⅔ Thalerstücke ..	1	13	2	—	21	—	1	11	3,38
Gold.	Seit 1834: Einfache Wilhelmsd'or oder Pistolen ..	9	41	2,2	5	17	10,7	9	28	1,85
	Doppelte Wilhelmsd'or im Verhältniß.									
	Vor 1834: Dukaten ...	5	36	—	3	7	—	5	28	1,76
	Georgsd'or	9	48	3,4	5	20	—	9	35	2,5
	Doppelte und halbe Georgsd'or im Verhältniß.									
	Hessen-Kassel									
rechnet	seit 1840 nach Thlr. (zu 30 Sgr., zu 12 Heller)	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im								
		24 1/2 Guldenfuß.			14 Thalerfuß oder preußisch Cour.			24 Guldenfuß.		
		fl.	kr.	Pf.	Thlr.	Sgr.	Pf.	fl.	kr.	Pf.
Silber.	Seit 1838: Vereinsm., 1 Thlr. u. $\frac{1}{6}$ Thlr., wie Preußen									
	Seit 1819: Einthalerstücke	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43
Gold.	Seit 1840: Friedrich Wilhelms-d'or	9	48	3,4	5	20	—	9	35	2,5
	Vor 1840: Pistolen od. 5 Thalerstücke	9	44	3,7	5	18	10,4	9	31	3
	Hessen-Darmstadt									
rechnet	seit 1837 nach Gulden (zu 60 kr., zu 4 Pf., wie Bayern) .	1	—	—	—	17	$1\frac{5}{7}$	—	58	2,6
Silber.	Vereinsm., 1 fl.-, $\frac{1}{2}$ fl.-Stücke, Kronth., Convth., wie Bayern									
Gold.	10 Guldenstücke	9	52	3,9	5	21	2,3	9	39	2
	Hohenzollern-Hechingen und Sigmaringen									
rechnet	nach Gulden (zu 60 kr., zu 4 Pf., wie Bayern).									
Silber.	Seit 1838: wie Bayern.									
	Früher: Conv.-Speciesthaler, s. Bayern.									
Gold.	Dukaten und Karolinen, wie Bayern.									
	Holland									
rechnet	seit 1839 n. Gulden zu 100 Cents	—	59	1,6	—	16	11,66	—	57	3,7
	Von 1816—1839 nach Gulden zu 100 Cents	1	—	1,7	—	17	3,18	—	59	0,16
Silber.	Seit 1839:									
	a) Reichsmünzen:									
	$2\frac{1}{2}$ Guldenstücke (Thaler)	2	28	2,0	1	12	5,16	2	25	1,85
	1 Guldenstücke zu 100 Cents	—	59	1,6	—	16	11,66	—	57	3,7
	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ Gulden im Verhältniß.									
	b) Handelsmünzen (schon seit 1816):									
	Silberdukaten oder Thaler	2	33	0,8	1	13	9,28	2	29	3
	Silberruydor od. Dukatons	3	11	3,1	1	24	9,54	3	7	2,75
	Von 1816 — 1839 Reichsmünzen:									
	3 Guldenstücke	3	1	1,1	1	21	9,53	2	57	0,7
	1 Guldenstücke zu 100 Cents	1	—	1,7	—	17	3,18	—	58	2,6
	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ Guldenstücke im Verhältniß.									
	Aeltere Münzen:									
	Schilling (zu 6 Stüber)	—	17	3,6	—	5	1,04	—	17	2
	Stüber (zu 6 Deut) . .	—	2	3,5	—	—	9,89	—	2	3,26

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.	14 Thalerfuß oder preußisch Cour. Thlr.	Gr.	Pf.	24 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.
Gold.	Seit 1816: 10 Guldenstücke	9	51	0,8	5	20	8,2	9	37	3,6
	Seit 1825: 5 Guldenstücke	4	55	2,4	2	25	4,1	4	41	0,5
	Aeltere Goldmünzen:									
	Oesterr. Niederl. Souverains-d'or	16	35	1	9	17	3,9	16	12	3,4
	Holländische Ruyder . .	14	50	2	8	17	1,1	14	30	1,9
	Holländer Dukaten . .	5	34	3	3	6	7,9	5	26	0,88
Papier.	Banknoten von 25 bis 1000 fl., im Werth wie Silbergeld.									
	Kirchenstaat									
rechnet	nach dem Scudo romano (Piaster) (zu 10 Paoli od. 100 Bajocchi, zu 5 Quatrini) .	2	32	0,7	1	13	5,73	2	28	3
	(In Ankona auch eingetheilt in 20 Soldi, zu 12 Denari.)									
	Bologna rechnet nach Lira (zu 20 Soldi, zu 12 Denari) in Courant (Fouri Banco)	—	30	1,8	—	8	8,44	—	29	3
	in Wechselgeld . . .	—	31	0,87	—	8	11,03	—	30	2
Silber.	Seit 1835: 1 Scudostück .	2	32	0,7	1	13	5,73	2	28	3
	1 Paoli = $\frac{1}{10}$ Scudi . .	—	15	0,9	—	4	4,17	—	14	3,5
	$\frac{1}{2}$ Scudi, $\frac{3}{10}$ Sc. (Testoni), $\frac{2}{10}$ Sc. (Papetti), $\frac{1}{20}$ Sc. ($\frac{1}{2}$ Paoli) im Verhältniß.									
	Aeltere Münzen: 1 Scudo romano zu 100 Bajocchi .	2	32	1,1	1	13	6,11	2	28	3
	1 Scudo zu 10 Paoli (v. Bologna)	2	30	1,9	1	12	11,97	2	27	0,5
	1 Madonnathaler (v. Bologna)	2	32	1,1	1	13	5,14	2	28	3
	Halbe Scudo und Madonnathaler im Verhältniß.									
Gold.	Seit 1835: 10 Scudi oder 100 Paolistücke . . .	25	23	0,5	14	19	8,7	24	49	0,5
	5 Sc. und 2$\frac{1}{2}$ Scudistücke im Verhältniß.									
	Seit 1818: Doppien . .	8	9	1,6	4	21	3,4	7	59	1,56
	Zechinen	5	34	1,4	3	6	6,3	5	25	3
	Halbe Doppien und $\frac{1}{2}$ Zechinen im Verhältniß.									
Papier.	Banknoten zu 25, 50 und 100 Scudi im Werth wie Silber.									
	Krakau									
rechnet Silber.	nach Gulden (zu 30 Groschen) Seit 1835: 1 Guldenstücke	—	17	0,5	—	4	10,7	—	16	2,96

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß.			14 Thalerfuß oder preußisch Cour.			24 Guldenfuß.		
		fl.	kr.	Pf.	Thlr.	Sgr.	Pf.	fl.	kr.	Pf.
	Lippe-Detmold und Lippe-Schaumburg									
rechnen	seit 1842 nach Thaler (zu 30 Sgr., zu 12 Pf.) . . .	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43
	Früher nach Thaler (zu 36 Mariengr., zu 6 Pf., zu 2 Heller)	1	50	1	1	1	6	1	47	3,08
Silber.	Seit 1842: wie Preußen.									
	Vorher: Speciesthaler . .	2	27	—	1	12	—	2	24	—
Gold.	(Schaumburg): Georg-Wilhelmsd'or	9	38	0,7	5	16	11,05	9	26	3,67
	Doppelter Georg-Wilhelmsd'or im Verhältniß.	19	16	1,5	11	3	10,1	18	53	3,34
	Lombardisch-Venetianisches Königreich									
rechnet	seit 1. Nov. 1823 nach dem Lira austriaca (zu 100 Centesimi = ⅓ Reichsgulden) . .	—	24	2	—	7	—	—	24	—
Silber.	Seit 1823: Scudo zu 6 Lir. austr. (= 1 Conv.-Spec.-Thlr.	2	27	—	1	12	—	2	24	—
	½ Scudi (zu 3 Lir. austr. = 1 Reichsgulden) . . .	1	13	2	—	21	—	1	12	—
	1 Lira austr. (= 20 kr. Conv.-Geld)	—	24	2	—	7	—	—	24	—
	½, ¼ Lirestücke im Verhältniß.									
	Vorher für das Königreich Italien: Stücke zu 5, 2, 1, ¾, ½ und ¼ Lir. ital. im Werth der französischen 5-, 2- ꝛc. Francsstücke (s. Frankreich).									
Gold.	Seit 1823: Souverainsd'or (zu 40 Lir. austr.) . . .	16	35	2,2	9	17	5,0	16	13	0,4
	Halbe Souverainsd'or (zu 20 Lir. austr.) . . .	8	17	3,1	4	23	8,5	8	6	2,2
	Lübeck									
rechnet	nach Mark Courant (zu 16 Schilling, zu 12 Pf.)	—	43	0,9	—	12	4,2	—	42	1
	und nach Thaler Lüb. (zu 48 Schill., zu 12 Pf.) . . .	2	9	2,8	1	7	0,7	2	6	3
Silber.	Speciesthaler	2	43	1,3	1	16	8	2	39	1,6
	Couranthaler (zu 3 Mk. Cour.)	2	9	2,8	1	7	0,7	2	6	3
	1 Markstück (zu 16 Schill.) .	—	43	0,9	—	12	4,2	—	42	1
	1 Schillingstück	—	2	2,2	—	—	8,75	—	2	2
	2 Mark-, 8-, 4-, 2 Schill.-Stück im Verhältniß.									
Gold.	Einfache Dukaten	5	33	2,5	3	6	3,8	5	26	0,47
	Doppelte Dukaten . . .	11	7	1	6	12	7,6	10	52	0,94

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.	14 Thalerfuß oder preußisch Cour. Thlr.	Ggr.	Pf.	24 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.
	Luxemburg									
rechnet	wie Holland.									
	Mecklenburg-Schwerin									
rechnet	nach Thaler (zu 48 Schilling)	2	2	2	1	5	—	1	59	3
Silber.	Seit 1789: $\frac{2}{3}$ Thalerstücke oder Gulden	1	21	$2\frac{2}{3}$	—	23	4	1	20	3,5
Gold.	Einfache Friedrich-Franz- und Paulsd'or	9	42	1,5	5	18	1,6	9	29	0,6
	Doppelte dtto.	19	24	3	11	6	3,2	18	58	1,2
	Mecklenburg-Strelitz									
rechnet	nach Reichsthaler (zu 24 Ggr. oder zu 48 Schill.), . .	1	50	1	1	1	6	1	48	—
	häufig auch nach preuß. Courant.									
Silber.	$\frac{1}{6}$ Thaler- oder 4 Ggr.stücke	—	18	$1\frac{1}{2}$	—	5	3	—	18	—
	$\frac{1}{12}$ Thaler- oder 2 Ggr.stücke	—	9	$\frac{3}{4}$	—	2	$7\frac{1}{2}$	—	9	—
Gold.	Pistolen	9	48	3,4	5	20	—	9	34	2
	Mexiko									
rechnet	nach Peso de Plata (zu 8 Real de Plata, zu 4 Quartillos, auch Piaster und Dollar, zu 100 Cents, genannt) . . .	2	31	3,8	1	13	4,96	2	28	2,3
Silber.	Pesos, Piaster, auch Dollars (zu 8 Real de P. mex) . .	2	33	2,3	1	13	10,56	2	30	0,48
Gold.	Onca de oro, Doblone (zu 8 Escud. de oro od. 16 Pesos)	38	31	3	22	7	4,8	37	39	2,16
	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ Onza (= 1 Escudo), $\frac{1}{16}$ Onza im Verhältniß.									
	Modena									
rechnet	nach dem Lira italiana (zu 100 Centesimi)	—	28	1,15	—	8	0,98	—	27	2,5
Silber.	Scudi nuovi (zu 5 Lire ital.)	2	21	1,7	1	10	4,91	2	18	0,67
	1 Lire ital.	—	28	1,15	—	8	0,98	—	27	2,87
	Stücke von 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ Lir. ital. im Verhältniß.									
Gold.	Stücke von 40 Lir. ital. .	18	53	2,6	10	27	3,4	18	28	—
	" " 20 " " .	9	26	3,3	5	13	7,7	9	14	—
	Nassau									
rechnet	wie Bayern nach Gulden, zu 60 kr., zu 4 Pf.									
Münzen.	1 Gulden-, $\frac{1}{2}$ Guldenstücke, Kronenthaler, Conv.-Speciesthaler, Dukaten, wie Bayern.									

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.	14 Thalerfuß oder preußisch Cour. Thlr.	Sgr.	Pf.	24 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.
	Neapel, s. unten Sicilien.									
	Nordamerikanische vereinigte Staaten									
rechnen	nach Dollars (Piaster) zu 10 Dimes oder zu 100 Cents	2	30	—	1	12	10	2	27	—
Silber.	Dollar (zu 100 Cents) . .	2	30	—	1	12	10	2	27	—
	½, ¼ Dollars im Verhältniß									
Gold.	Seit 1837: Eagles (Adler) zu 10 Dollars	25	—	—	14	8	4	24	30	—
	½, ¼ Eagles im Verhältniß.									
	Norwegen									
rechnet	nach Speciesthaler (zu 5 Ort oder Mark, zu 24 Schilling)	2	38	3,7	1	15	4,86	2	36	—
Silber.	Speciesthaler	2	38	3,7	1	15	4,86	2	36	—
	½, ⅕ und 1/15 Spec.th. im Verh.									
Papier.	Noten der Reichsbank zu 100, 50, 10, 5, 1 und ½ Speciesthaler, im Werth wie Silbergeld.									
	Oesterreich									
rechnet	nach Reichsgulden (zu 60 kr.)	1	13	2	—	21	—	1	12	—
	nach Reichsthaler (zu 90 kr.)	1	50	1	1	1	6	1	48	—
	und nach Gulden Wiener Währung (Einlösungsscheine)	—	29	1⅗	—	8	4,8	—	28	3,3
Silber.	(Convent. von 1753) Speciesthaler zu 2 Gulden . .	2	27	—	1	12	—	2	24	—
	20 Kreuzerstücke	—	24	2	—	7	—	—	24	—
Gold.	Reichsdukaten	5	36	—	3	7	—	5	29	0,51
	Ungarische Dukaten . . .	5	37	0,7	3	7	4,1	5	30	1,08
	Doppelte und vierfache im Verhältniß.									
Papier.	Banknoten zu 5, 10, 25, 50, 100, 500 und 1000 Reichsgulden (gewöhnlich Münze genannt), von einerlei Werth wie Silbergeld.									
	Scheine (Wiener Währungs- oder Einlösungs-), zu 1, 2, 5, 10, 20 und 100 fl., von denen 2½ fl. den Werth von 1 Reichsgulden Münze haben.									
	Seit 15. Juni 1842: Kassenanweisungen der österr. Nationalbank zu 50, 100, 500 und 1000 Reichsgulden, mit täglicher Zinsenvergütung zu jährlich 3 Prozent.									

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß.			14 Thalerfuß oder preußisch Cour.			24 Guldenfuß.		
		fl.	kr.	Pf.	Thlr.	Sgr.	Pf.	fl.	kr.	Pf.
	Ostindien (englische Besitzungen)									
rechnen	nach der gesetzlich allgemeinen Company Rupie . . .	1	7	0,8	—	19	2,41	1	4	2,8
	Oldenburg									
rechnet	nach Thlr. Goldw. (zu 72 Groten, zu 5 Schwaren od. 4 Pfenn.)	1	56	3,2	1	3	4,45	1	53	1,5
	und nach Thaler Courant .	1	42	2,2	—	29	3,6	1	39	2,8
Silber.	Seit 1816: 24 Grote od. $\frac{1}{3}$ Thlr.	—	30	2,5	—	8	9	—	29	3,74
	12, 6 und 4 Grotestücke im Verhältniß.									
	(Für Birkenfeld) seit 1840: 2 Thaler oder $3\frac{1}{2}$ Guldenstücke	3	30	—	2	—	—	3	25	1,1
	Polen									
rechnet	seit 1842 wie Rußland nach Rubel (zu $6\frac{2}{3}$ fl. polnisch)	1	53	0,5	1	2	3,85	1	51	0,1
rechnete	von 1833—42 nach Gulden (zu 30 Gr. oder 15 Kopeken)	—	16	3,9	—	4	10,18	—	16	2,47
Silber.	Von 1833—42: 10 Guldenstücke (= $1\frac{1}{2}$ Rubel) . . .	2	49	2,7	1	18	5,78	2	45	2,8
	5- und 1 Guldenstücke im Verhältniß.									
Gold.	Seit 1834: Dukaten oder Rubel-Imper. zu 20 fl. oder 3 Rubel	5	51	1,5	3	11	5,3	5	43	2,08
	Von 1842 an hat Polen durchgängig die Münzen wie Rußland.									
Papier.	Seit 1830: Bankbillets zu 5, 50 und 100 fl. poln., im Werth wie Silbergeld.									
	Portugal									
rechnet	nach Milreïs zu 1000 Reïs; der Werth des Milreïs ist seit 1835	2	50	2,4	1	18	8,94	2	46	2,6
Silber.	Seit 1835: Kronen (Coronas) zu 1000 Reïs	2	50	2,4	1	18	8,94	2	46	2,6
	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ Kr. zu 200 Reïs, $\frac{1}{10}$ zu 100 Reïs im Verhältniß.									
Gold.	Seit 1835: Goldkrone (Cor. d'ouro) zu 5000 Reïs)	14	15	2,3	8	7	—	13	53	3,69
	$\frac{1}{2}$ Goldkr. (Meios-Cor. d'ouro) zu 2500 Reïs	7	7	3,1	4	3	6	6	56	3,84
	Preußen									
rechnet	nach Thaler (früher eingetheilt in 24 Ggr. zu 12 Pf., seit 1821 aber in 30 Sgr. zu 12 Pf.)	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.	14 Thalerfuß oder preußisch Cour. Thlr.	Sgr.	Pf.	24 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.
Silber.	Ein Thaler (zu 30 Sgr., zu 12 Pf.)	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43
	$\frac{1}{6}$ Thlr. (zu 5 Sgr.) . . .	—	17	2	—	5	—	—	17	0,42
	Seit 1839: 2 Thalerstücke oder Vereinsmünzen	3	30	—	2	—	—	3	25	2,8
Gold.	Seit 1770: Einfache Friedrichs d'or (zu 5 Thlr. Gold) .	9	48	3,4	5	20	—	9	35	2,41
	Doppelte zu 10 Thlr. Gold und halbe zu 2½ Thlr. im Verhältniß.									
Papier.	Kassenanweisungen zu 1, 5, 50, 100 u. 500 Thaler Cour., im vollen Werth wie Silbergeld.									
	Reußische Fürstenthümer									
rechnen	seit 1841 nach Thaler (zu 30 Sgr., zu 12 Pf., wie Preußen)									
Silber.	Seit 1841: Vereinsmünze zu 2 Thaler	3	30	—	2	—	—	3	25	2,8
	Rußland									
rechnet	nach Rubel (zu 100 Kopeken)	1	53	0,5	1	2	3,85	1	51	0,1
Silber.	Seit 1810: Silberrubel (oder Banco) zu 100 Kopeken	1	53	0,5	1	2	3,85	1	51	0,1
	½ Silberrubel (zu 50 Kopeken)	—	56	2,2	—	16	1,93	—	55	2
	Stücke zu 25, 20 und 10 Kopeken im Verhältniß.									
Gold.	Seit 1763: Imperialen (zu 10 Rubel)	19	31	0,9	11	8	1,5	19	4	3,5
	Halbe Imperialen (zu 5 R.)	9	45	2,4	5	19	0,8	9	32	1,7
Platina.	Seit 1828: 3 Rubelstücke .	5	39	1,5	3	6	11,56	5	20	2,5
	Stücke von 6 und 12 Rubel im Verhältniß.									
Papier.	Bank-Assignaten zu 2 Rubel auf blauem Papier, zu 10 Rubel auf rothem, zu 25, 50, 100 und 200 Rubel auf weißem. Seit 1840 ist der feste Cours: 3½ Rubel Papier = 1 Silberrubel.									
	Russisch-poln. Münzen nach dem Ukas v. 1. Mai 1834.									
Silber.	1½ Rubel-Imperial (zu 3 Rubel oder 20 fl. poln.) . . .	2	49	2,7	1	18	5,78	2	45	3,43
	¾ Rubel (= 5 fl. poln.), 15 Kopeken (= 1 fl. poln.) im Verh.									
Gold.	Rubel-Imperial (zu 3 Rubel oder 20 fl. poln.) . . .	5	51	1,5	3	11	5,3	5	31	2,86

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.	14 Thalerfuß oder preußisch Cour. Thlr.	Ggr.	Pf.	24 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.
	Sachsen (Königreich)									
rechnet	seit 1841 nach Thaler (zu 30 Neugroschen, zu 10 Pf.)	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43
	dabei noch nach Thaler in Conventionsmünze	1	47	3,66	1	—	10	1	45	1,91
	rechnete früher nach Reichsthaler (zu 24 Ggr., zu 12 Pf.)	1	50	1	1	1	6	1	48	—
Silber.	Seit 1838: Vereinsmünze, 1 Thaler- und 1/6 Thalerstücke wie Preußen.									
Gold.	Augustsd'or (zu 5 Thaler) .	9	48	3,4	5	20	—	9	35	2,41
	Doppelte (zu 10 Thlr.) im Verhältniß. Dukaten wie Bayern.									
Papier.	a) Scheine zu 1 und 2 Thaler des 14 Thalerfußes.									
	b) Noten der Leipziger Bank zu 20 Thaler des 14 Thalerfußes, dann zu 100, 200, 500 und 1000 Thaler in Conventionsmünze.									
	Sachsen-Altenburg									
rechnet	seit 1841 und rechnete früher wie Königreich Sachsen.									
Silber.	Seit 1838: Wie im Königreich Sachsen.									
	Sachsen-Coburg-Gotha									
rechnet Silber.	in Coburg wie in Bayern, in Gotha wie im Kgr. Sachsen.									
Gold.	Dukaten	5	33	2,5	3	6	3,8	5	26	0,44
	Sachsen-Meiningen und Hildburghausen									
rechnet Silber.	seit 1837 wie Bayern.									
	Seit 1837: Silberm. Gulden	1	—	2	—	17	3,41	—	59	1,5
	Sachsen-Weimar und Eisenach									
rechnet Silber.	seit 1840 wie Preußen, dabei noch und früher wie Königreich Sachsen.									
Silber.	Vordem seit 1763:									
	Speciesthaler	2	27	—	1	12	—	2	24	—
	Gulden (zu 16 Ggr.) . .	1	13	2	—	21	—	1	12	—
	1/3 Thalerstücke	—	36	3	—	10	6	—	36	—
	1/6 und 12 Thalerstücke im Verhältniß.									

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.	14 Thalerfuß oder preußisch Cour. Thlr.	Sgr.	Pf.	24 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.
	Sardinien									
rechnet	seit 1827 nach der Lira nuove zu 100 Cent (= 1 frz. Franc)	—	28	1,15	—	8	0,98	—	27	2,87
Silber.	Seit 1816: 5 Lire (= 1 Scudi), 2=, 1=, ½=, ¼=Lirestücke, siehe Frankreich.									
Gold.	Doppien zu 20=, 40=, 80=Lirestücken, siehe Frankreich.									
	Schwarzburg=Rudolstadt									
rechnet	in der Oberherrschaft seit 1841 wie in Bayern.									
Silber.	in der Unterherrschaft seit 1841 wie in Preußen.									
	in d. Unterherrschaft dabei noch nach Thlr. in Conv.münze	1	47	3,66	1	—	10	1	45	1,91
	Schwarzburg=Sondershausen									
rechnet	seit 1841 nach Thaler (zu 30 Sgr., zu 12 Pf. . . .	1	45	—	1	—	—	1	42	3,43
	Dabei noch nach Thaler in Conventionsmünze	1	47	3,66	1	—	10	1	45	1,91
Silber.	Seit 1841: Vereinsm., 1 und ½ Thalerstücke wie Preußen.									
	Vordem, seit 1763:									
	⅙ Thalerstücke	—	18	1,5	—	5	3	—	17	3,88
	$\frac{1}{12}$ Thalerstücke . . .	—	9	¾	—	2	7½	—	8	3,94
	Schweden									
rechnet	a) nach Reichsthaler=Species (zu 48 Schilling=Spec., zu 12 Pf. oder Oere oder Rundstücke)	2	40	1,8	1	15	10,1	2	36	3,5
	b) nach Thaler = Bancogeld (1 Thlr. Bco. = ⅜ Thlr. Spec. seit 1830) zu 48 Schill. Bco.=geld, zu 12 Pf. Bancogeld.	1	—	0,67	—	17	2,28	—	58	3,2
	c) nach Thaler=Reichsschuldzettel (1 Thlr. = ⅔ Thlr. Bco. = ¼ Thlr. Spec. seit 1830) zu 18 Schill. Reichsgeld, zu 12 Pf. Reichsgeld	—	40	0,45	—	11	5,52	—	39	0,8
Silber.	Seit 1830: Speciesthaler (zu 48 Schill.)	2	40	1,8	1	15	10,1	2	36	3,5
	½, ¼, ⅛ und $\frac{1}{12}$ Speciesthaler im Verhältniß.									
Gold.	Seit 1777: Dukaten . .	5	31	3,3	3	5	9,6	5	24	—
	2= u. 4fache Dukaten i. Verh.									

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.	14 Thalerfuß oder preußisch Cour. Thlr.	Sgr.	Pf.	24 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.
Papier.	a) Bankzettel d. Reichsb. zu 8, 10, 12, 14 u. 16 Schill. Bco., u. zu 2, 3, 5, 6, 9 ꝛc. bis 50 Thlr. Bco.									
	b) Reichsschuldzettel, 1 Thlr. = ⅔ Thlr. Bco. = 12 Schill. Species.									
	Schweiz.									
Rechnen	Aargau, Basel, Bern, Freiburg, Luzern, Neuenburg, Solothurn, Thurgau, Waadt und Wallis, Zürich nach Schweizerfranken (zu 10 Batzen, zu 10 Rappen)	—	41	3,6	—	11	11,68	—	40	3,84
	Aargau und Freiburg auch nach Gulden (zu 15 Batzen, zu 4 kr.)	1	2	3,4	—	17	11,53	1	1	3,25
	Appenzell, Thurgau (auch) nach Gulden (zu 60 kr., zu 4 Angster; auch zu 15 Batzen oder 50 Schilling)	1	1	1	—	17	6	1	—	—
	Basel nach Gulden (zu 60 kr., zu 8 hl., oder zu 15 Bz., zu 4 kr.)	1	2	3,4	—	17	11,53	1	1	3,25
	Genf nach Livres (à 20 Sols, à 12 Deniers)	—	45	2,3	—	13	0,28	—	44	2,4
	Gulden (à 20 Sols, à 12 Den. petite monnaie) . . .	—	13	0,1	—	3	8,64	—	12	2,92
	Glarus nach Gulden (zu 15 Bz., zu 4 Pf. oder zu 20 Schill., zu 12 hl.)	1	3	—	—	18	—	1	1	2,3
	Graubünden nach Gulden (zu 60 kr. oder 70 Bluzger) .	—	48	2,8	—	13	10,97	—	47	2,4
	Neuenburg auch nach Livres (à 20 Sols, à 12 Den. tournois de Neufch.)	—	41	2,2	—	11	10,45	—	40	2,45
	St. Gallen und Schaffhausen: Gulden (zu 60 kr., zu 4 hl.)	1	1	1	—	17	6	1	—	—
	Schwyz: Gulden (zu 15 Batzen, oder zu 60 kr., zu 4 hl., auch zu 40 Schill., zu 4 Rp.) .	1	7	0,2	—	19	1,9	1	5	2,7
	Tessin: Lira (à 20 Soldi, à 4 Quattrini oder 12 Denari)	—	18	1,5	—	5	3	—	17	3,88
	Unterwalden: Gulden (zu 15 Batzen, zu 4 kr., oder zu 40 Schill., zu 6 Angster) . .	—	55	3,5	—	15	11,6	—	54	2,3
	Uri: Gulden (Einth. wie Unterwalden	—	51	2,3	—	14	8,83	—	50	1,66
	Zug (Einth. wie Uri) . .	—	52	3,9	—	15	1,62	—	51	3,14
	Zürich: Gulden (zu 60 kr., zu 8 hl., od. zu 40 Schill., zu 12 hl.)	1	7	0,2	—	19	1,9	1	5	2,7
	Schw. Franken (zu 10 Bz., zu 10 Rp.)	—	41	3,6	—	11	11,68	—	40	3,84

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im: 24 1/2 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.	14 Thalerfuß oder preußisch Cour. Thlr.	Sgr.	Pf.	24 Guldenfuß. fl.	kr.	Pf.
	Sicilien									
rechnet	seit 1818 nach dem Ducato di Regno . . . . zu 10 Carlini oder 100 Grani, letztere auf Sicilien Bajocchi.	2	—	0,7	1	4	4,05	1	57	1,88
Silber.	Seit 1818: 1 Scudo oder Piaster (zu 12 Carlini) .	2	24	0,9	1	11	2,46	2	20	3,92
	Der Dukato (zu 10 Carlini oder 100 Grani) . . .	2	—	0,7	1	4	4,07	1	57	1,88
	Stücke zu 1, 2 u. 6 Carlini (½ Scudi) im Verhältniß.									
Gold.	Seit 1818: Oncetta (zu 3 Duk.) Quintupla (zu 15 Duk.) und Decupla (zu 30 Duk.) im Verhältniß	6	8	0,8	3	16	3,5	5	59	3,66
	Spanien									
rechnet	nach Piaster, Peso duro (zu 8 Reales de Plata mex. oder 20 Real. de Vellon) . .	2	31	3,8	1	13	4,96	2	28	2,14
Silber.	Seit 1772: Piaster, Peso duro (zu 8 Real. de Plata mex. oder 20 Real. de Vellon à 34 Maraved.)	2	33	2,3	1	13	10,56	2	30	0,47
	½, ¼, ⅛, 1/16 Piaster im Verh.									
	1 Real. de Vell. oder ¼ Pesetas provinciales . .	—	7	2,1	—	2	1,82	—	7	1,3
	Stücke zu 4 R. de Vell. (Pesetas) u. 2 R. de V. im Verh.									
Gold.	Seit 1786: Onzas de oro oder Quadrupels	38	31	3	22	7	4,8	37	39	2,95
	½ Onz. (Doblon de a ocho), ¼ Onz. (Doblons od. Pistolen), ⅛ Onz. (Escudo de oro) im Verhältniß.									
	Escudillo de oro, coronillas oder Goldpiaster . . .	2	24	3,2	1	11	9,7	2	21	2,17
	Südamerikanische Freistaaten									
rechnen	nach Peso de Plata mex. (Piaster zu 8 Real.), der auch Dollar heißt (zu 100 Cents)	2	31	3,8	1	13	4,96	2	28	2,14
	dem Real (zu 16 Quartos oder 34 Maravedis) . .	—	19	—	—	5	5,12	—	18	2,29
Silber.	Piaster od. Pesos (zu 8 Real. mex.)	2	33	2,3	1	13	10,56	2	30	0,47
	½, ¼ und ⅛ im Verhältniß.									
Gold.	Onza de oro (zu 8 Escudos de oro)	38	1	2	21	28	8	37	10	0,7
	¼ und ⅛ Onzas im Verh.									

Art des Geldes.	Benennung der Länder und ihrer Münzen.	Werth eines Stückes im 24 1/2 Guldenfuß.			14 Thalerfuß oder preußisch Cour.			24 Guldenfuß.		
		fl.	kr.	Pf.	Thlr.	Sgr.	Pf.	fl.	kr.	Pf.
	Toskana									
rechnet	nach Fiorino (= $2\frac{1}{2}$ Paoli) zu 100 Quattrini	—	39	2,5	—	11	3,86	—	38	2,93
	„Lira (in moneta buona oder corrente)	—	23	3,1	—	6	9,5	—	23	1,85
	„Lira (in moneta lunga) .	—	22	3,15	—	6	6,1	—	22	1,06
	Der Lira zu 20 Soldi, zu 12 Denari.									
	„Scudi (zu 7 Lira) u. nach Paoli (zu $\frac{2}{5}$ Fior.) im Verhältniß.									
	„Pezza da otto reali (à 20 Soldi, à 12 Den. di Pezzo) . .	2	16	2,86	1	9	0,72	2	13	2,5
Silber.	Fiorino (zu 100 Quattrini)	—	39	2,5	—	11	3,86	—	38	3,26
	Stücke zu 4 Fior. (10 Paoli), 2 Fior. (5 Paoli), $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ Fior im Verhältniß.									
	1 Paolostück	—	15	3,1	—	4	6,1	—	15	1,7
	1 Lirastück (= $1\frac{1}{2}$ Paoli) .	—	23	2	—	6	8,55	—	23	0,9
	Dene (10 Lirastücke) . . .	3	57	2,5	2	7	10,74	3	52	0,9
	Stücke zu 2, $\frac{1}{2}$ Paoli, zu $\frac{1}{2}$ Dene (5 Lira) im Verhältniß.									
Gold.	80 Fiorini	53	4	0,8	30	19	3,3	51	59	0,08
	Rusponi (zu 40 Lire od. 60 Paoli oder 24 Fiorini) . . .	17	1	1,8	9	24	10,7	16	40	2,3
	Zecchini (zu $13\frac{1}{3}$ Lire od. 20 Paoli oder 8 Fiorini)	5	40	1,9	3	8	3,5	5	33	2,1
	Türkei									
rechnet	nach Piaster, deren Werth im Jahre 1841	—	6	1,6	—	1	9,92	—	6	1,03
	zu 40 Paras, od. 120 Cour.Asper, od. 100 gute Asper.									
	Der Beutel = 500 Piastern; der Beutel Gold = 30000 Piastern.									
	Waldeck									
rechnet Silber.	wie Preußen.									
	Württemberg									
rechnet	nach Gulden (zu 60 kr., zu 4 Pf.)	1	—	—	—	17	$1\frac{5}{7}$	–	58	3,102
Silber.	Seit 1837: Wie Bayern.									
	Seit 1824: 1 Guldenstücke	1	—	—	—	17	$1\frac{5}{7}$	—	58	3,102
	2 Guldenstücke	2	—	—	1	4	$3\frac{3}{7}$	1	57	2,2
	Conv.-Species- und Kronenthaler wie Bayern.									
Gold.	Dukaten, und früher ganze und halbe Karolinen, wie Bayern.									

VIII. Tabelle.

Feingehalt und Rauhgewicht der bekanntesten Current-Münzsorten.

Benennung der Münzen.	Feingehalt. Karat.	Feingehalt. Grän.	Gehen auf eine Vereinsmark rauh.
Goldmünzen.			
Dukaten, österreichische, bayerische, württembergische	23	8	67
Dukaten, holländische	23	7	66,93
Friedrichsd'or, preußische	21	8	35
Wilhelmsd'or, Hannoveraner, Braunschweiger, dänische ꝛc.	21	6	35⅙
Souverainsd'or, österreichisch-niederländische (16 fl. 35 kr. 1 pf.)	22	—	21
40 Frankenstücke, französische (40 Lirestücke, sardinische)	21	7	18,124
20 Frankenstücke, französische (20 Lirestücke, sardinische)	21	7	36,248
Holländische Zehn-Guldenstücke	21	7	34,753
" " Fünf-Guldenstücke	21	7	69,507
Englische Sovereigns oder Pfundstücke . .	22	—	29,278
Russische Imperialen zu 10 Rubel . . .	22	—	17,8676
" " " " 5 "	22	—	35,735
Alte französische Louisdor, im Durchschnitte	21	7—8	32—38
Spanische Quadrupeln	21	6	8,6409
Spanische Pistolen oder Dopien	21	6	17,2818
Badische 10 (und 5) Guldenstücke . . .	21	8	34 (68)
Badische Rheindukaten	22	6	67
Hessische 10 (und 5) Guldenstücke . . .	21	7	34,65 (69,3)
Karolin	18	4	24
Mard'or	18	4	36
Silbermünzen.	Loth.		
Conventionsthaler	13	6	8⅓
Laubthaler von 1726 bis 1793, im Durchschnitte	14	6—9	8,95 — 9
Fünffrankenstücke	14	7	9,35
Kronenthaler	13	7	6,3
Vierundzwanziger	9	6	35
Zwölfer	8	—	60
Preußische Thaler	12	—	10½
⅙ preußische Thaler (5 Sgr.)	8	6	43¾
Neue 3½ Guldenstücke oder Vereinsmünzen	14	7	6,3
Neue Gulden	14	7	22,05
Neue halbe Gulden	14	7	44,1
Schilling Sterling (zu 12 Pence St.) . .	14	14	38,85
Russische Silberrubel	13	16	11,28
Lombardisch-venetianische Lire	14	7	54
Spanische Piaster	14	7	8,64

IX. System des neuen französischen Masses.

Mètre, die Grundeinheit der Maße und Gewichte, ist gleich dem zehnmilliontesten Theile von dem Quadranten des Erdmeridianes, von welchem Méchain und Delambre, und später Biot und Arago (1791 bis 1793) einen Bogen von 9$\frac{2}{3}$ Graden (von Dünkirchen bis Barcelona) gemessen haben,
= 3,078444 alt Pariser Fuß = 443.295936 alt Pariser Linien
= 3,426309 bayer. Fuß.

Mètre carré = 9,476817461136 alt franz. □ Fuß
= 11,739593363481 bayer. □ Fuß.

Mètre cube = 29,17385185232935 2384 alt fr. Kubf.
= 50.412,416000825120919552 alt fr. Kubz.
= 40,22347439763532 1629 bayer. Kubf.

Kilogramme, Livre, das Gewicht des destillirten Wassers, im luftleeren Raume bei der Temperatur des schmelzenden Eises (0° R. und 0° Cent.) gewogen, und bei dem Volumen des Decimètre Cube
= 280242 köln. Richtpf.
= 20799,29 holl. Aß
= 1,7857142857 = 1$\frac{11}{14}$ bayer. Pfd.

a) Längenmaße.

Myriamètre, Lieue	=	10.000 Mètres	=	30784,44 alt Pariser Fuß.
Kilomètre, Mille	=	1000 Mètres	=	3078,444 Fuß.
Hectomètre	=	100 Mètres	=	307,8444 Fuß.
Décamètre, Perche	=	10 Mètres	=	30,78444 Fuß.
Mètre			=	3,078444 Fuß.
Décimètre, Palme	=	0,1 Mètre	=	44,3295936 Linien.
Centimètre, Doigt	=	0,01 Mètre	=	4,43295936 Linien.
Millimètre, Trait	=	0,001 Mètre	=	0,443295936 Linien.
Toise = 2 Mètres, in 6 Fuß abgetheilt,			=	6,1568 alt Pariser Fuß.

Anmerkung. Die griechischen Vorsylben Déca, Hecto, Kilo, Myria — bedeuten die Oberabtheilungen; die lateinischen: Deci, Centi, Milli die Unterabtheilungen jenes Maßes, bei dem sie stehen. — Da sich dieses Maß auf die wirkliche Größe unserer Erdkugel gründet, so heißt es auch das **natürliche**.

b) Flächen- und Ackermaße.

Hectare, Arpent = 10.000 Q. Mètres	=	94.768,17461136	fr. Q. Fuß.
Are, Perche carrée = 100 Q. Mètres	=	947,6817461136	fr. Q. Fuß.
Centiare, Mètre carrée	=	9,476817461136	fr. Q. Fuß.

c) Körpermaße für flüßige Dinge.

Décalitre, Velte	= 10 décimètres cubes	= 504,124160	fr. Kbzoll.
Litre, Pinte	= décimètre cube	= 50,412416	
Décilitre, Verre	= 0,1 décimètre cube	= 5,0412416	

d) Körpermaße für trockene Waaren.

Kilolitre, Muid = 1 Mètre cube = 1000 décimètres cubes = 50.412,416 franz. Kubikzoll.

Hectolitre, Setier = 100 décimètres cubes = 5041,2416 fr. Kbz.

Décalitre, Boisseau = 10 décimètres cubes = 504,12416 fr. Kbz.

Litre, Pinte = décimètre cube = 50,412416 fr. Kbz.

e) Maße für feste Körper.

Stère, Mètre cube = 29,17385185 fr. Kbf.

Décistère, Solive = 0,1 Mètre cube = 2,917385185 fr. Kbf.

f) Gewicht.

Myriagramme, 10 Livres = 2'802.820 köln. Richtpf.

Kilogramme, Livre = 280.242 köln. Richtpf.

Hectogramme, Once, 0,1 Livre = 10 Gros	= 28.024,2	k.	Richtpf.
Décagramme, Gros, 0,1 Once = 10 deniers	= 2.802,42	—	—
Gramme, Denier, 0,1 Gros = 10 grains	= 280,242	—	—
Décigramme, Grain, 0,1 dénier	= 28,0242	—	—
Centigramme, 0,1 Grain	= 2,80242	—	—
Milligramme	= 0,280242	—	—

g) Münzen.

	Livre.	Sols.	Denier.	fr.	pf.	hl.	
Franc	= 1.	0.	3.	28	1	0,3	im 24½ fl. Fuß
Décime	= 0.	2.	0,3.	2.	3.	1,5	
Centime	= 0.	0.	2,43.	0.	1.	0,26	

Anmerkungen.

1) Die Einheit des neuen in Frankreich eingeführten Münzsystems ist eine Silbermünze, Franc d'argent genannt, am Gewichte von 5 Grammes oder 1401 köln. Richtpfennigen oder 104 holländ. Aß. Die Legirung ist ein Zehntel des ganzen Gewichtes. Daher enthält ein neuer gesetzmäßiger Silberfrank an feinem Silber 4½, und am Zusatze ½ Gramm. Nach der in Deutschland üblichen Benennung ist ein solcher Silberfrank ein Stück des 14⅖löthigen Silbers am Gewichte von 5 Grammen. Der Durchmesser eines Franken = 23 Millimeter. — Achtzig neue Silber-Franken gleichen genau 81 vormal. Livres. (Nur hat man in Deutschland den alten Livre auf 27 kr. 2 pf., also um eine Kleinigkeit zu hoch angesetzt.)

2) Die

2) Die halben, doppelten und fünffachen Silberfranken sollen genau den halben, doppelten und fünffachen Gehalt des erwähnten Silber-Franks enthalten. Indessen sind die genannten Unter- und Ober-abtheilungen desselben mit einem Ueber- oder Untergewichte von höchstens $\frac{1}{1000}$ des ganzen vorgeschriebenen Gewichtes, und mit einem Ueber- oder Untergehalte an feinem Silber von $\frac{7}{1000}$ des ganzen Gehaltes für annehmbar erklärt.

3) Das Gewicht der im Umlaufe befindlichen Kupfermünzen von zwei, drei und fünf Centimen ist: 4, 6, 10 Grammen. Die 5 Centim-stücke (1 kr. 1 pf. 1,3 hl.) heißen auch Sous; 10 Centimstücke = 2 Sous.

4) Neuer Goldmünzen gibt es in Frankreich zweierlei Sorten, nämlich Goldstücke von 20, und andere von 40 Franken. Das Gewicht des Zwanzigfrankenstücks ist durch das Gesetz dahin bestimmt, daß jedes Stück 6452 Milligrammes halte, folglich 155 solche Stücke ein Kilogramme betragen. Das Vierzigfrankenstück muß gesetzmäßig 12903 Milligrammes im Gewichte haben. (Vergl. Code de Police Administrative p. 228.)

Nach süddeutschem Münzfuße beträgt das Zwanzigfrankenstück 9 fl. 26 kr. 3 pf. 0,6 hl.; ein Vierzigfrankenstück 18 fl. 53 kr. 2 pf. 1,2 hl.

5) Das alte französische Troygewicht, oder Poids de Marc, wird also eingetheilt:

1 Livre = 2 Marc = 16 Onces = 128 Gros = 384 Deniers = 9216 Grains = 221184 Primes. Da das neue Kilogramme = 18827,15 Grains = 280242 köln. Richtpf. ist,

so beträgt ein alt franz. Grain oder Gran 14,885 köln. Richtpf.

* Resultate.

α) 1000 bayerische Fuß = 291,859 } Mètres.
1000 bayerische Ellen = 833,011 }

1000 Mètres = { 3426,311 bayer. Fuß.
1200,465 bayer. Ellen.

1000 Myriamètres = 1348,621 } bayer. Chaussee-Meilen.
1000 Kilomètres = 134,8621 }

1000 bayer. Ch. Meilen = { 741,498 Myriamètres.
7414,980 Kilomètres.

β) 1000 Arpents = 293,489834 } bayer. Tagw.
1000 Ares = 29,348934 }

1000 bayer. Tagw. = { 3.407,2718 Arpents.
34.472,718 Ares.

γ) 1000 Stères = 319,23 bayer. Klafter.
1000 bayer. Klafter = 3132,9 Stères.

δ) 1000 Décalitres = { 146,1608 bayer. Visireimer zu 64 Maß.
155,9048 Schenkeimer zu 60 Maß. }

1000 bayer. Schenkeimer = 6414,180 } Décalitres.
1000 Visireimer = 6841,792 }

ε) 1000 Kilolitres = 4497,244 bayer. Schäffel.
1000 bayer. Schfl. = 222,3582 Kilolitres.

ζ) 1000 Kilogrammes = 1785,714285 } bayer. Pfd.
1000 Myriagrammes = 17857,14285 }

1000 bayer. Pfd. = { 560 Kilogrammes.
56 Myriagrammes. }

Dritte Abtheilung.

Maſs-, Gewichts- und Münz-System der alten Römer, Griechen und Hebräer.

Quellen.

1) Romé de l'Isle Métrologie; Paris 1789.

2) Bernardi Lamy, Adparatus biblicus.

3) Voyage du jeune Anacharsis en Grèce, par M. l'Abbé Barthélemy; Paris 1788.

Damit wurden Nieuport's, Eisenschmid's und Paucton's Angaben verglichen.

Voraussetzungen.

1) Der alte römische Fuß hielt 130,66 alte Pariser Linien. Hiermit stimmen alle noch vorhandenen oder aufgefundenen Exemplare überein, welche Barthélemy, Jacquier, Grignon, Stuart gemessen haben.

2) Der alte römische Fuß verhielt sich zum griechisch-olympischen wie 24 : 25.

3) Der römische Quadrantal oder Amphora war genau der römische Kubikfuß, und wog mit Weine gefüllt 80 römische Pfund.

4) Nach Plinius dem Aelteren (Nat. hist. Lib. 33. Cap. 3.) waren die ersten Goldmünzen Roms von der Art, daß der Skrupel Gold oder der vierundzwanzigste Theil der römischen Unze zu 20 Sesterzen oder 5 Silberdenaren gerechnet wurde. Nun wogen viele solche Goldmünzen, die sich noch so unverletzt erhalten haben, als man nur wünschen kann, genau 21 alte Pariser Gran, und die Dreiskrupelstücke 63 Pariser Gran. Da ferner von den letztern 96, von den erstern aber 288 auf das römische Pfund gingen, so ist die wahre Schwere dieses Pfundes $= 288 \times 21 = 96 \times 63 = 6048$ Pariser Gran.

5) Die Längenmaße der Alten waren Theile eines Erdgrades im Meridiane.

6) Das griechische Gewicht wurde, unabhängig von dem römischen, durch Abwägung vieler noch vorhandener und gut erhaltener griechischer Gold- und Silbermünzen bestimmt.

A. Masse der Römer.

a) Linien- und Längenmasse.

Römische Benennung.	Milliare.	Στάδιον ὀλυμπικόν.	Passus.	Cubitus.	Pes.	Palmus.	Digitus.
	1	8	1000	$3333\frac{1}{3}$	5000	20.000	80.000
		1	125	$416\frac{2}{3}$	625	2.500	10.000
			1	$3\frac{1}{3}$	5	20	80
				1	$1\frac{1}{2}$	6	24
					1	4	16
						1	4
							1
Franz. Maß Dd.	4537′ Fuß.	567,125′ —	4,537′ —	1,3611′ —	130,60‴ Linien.	32,66‴ —	8,166‴ —
Bayer. Maß Dd.	5049,7′ Fuß.	631,2125′ —	5,0497′ —	1,51491′ —	12,11928″ Zolle.	36,3578‴ Linien.	9,08946‴ —

b) Flächenmaße.

Röm. Benennung.	Saltus.	Centuria.	Haeredium.	Jugerum.	Actus quadratus (Acnua).	Clima.	Actus minimus.	Scripulum.
	1	4	400	800	1600	6400	48.000	230.400
		1	100	200	400	1600	12.000	57600
			1	2	4	16	120	576
				1	2	8	60	288
					1	4	30	144
						1	7,5	36
							1	4,8
								1
Römisches Maß.	Br. L. 4800 . 4800 23'040,000 □'	Br. L. 2400 . 2400 5'760.000 □'	Br. L. 240 . 240 57.600 □' —	Br. L. 120 . 240 28.800 □' —	Br. L. 120 . 120 14.400 □' —	Br. L. 60 . 60 3600 □' —	Br. L. 4' . 120 480 □' —	Br. L. 10' . 10' 100 □' —
Franz. Maß.	200,16 Hectares.	5004 Ares.	47.422,776 □' Fuß	23.711,338 □'	11.855,664 □'	2963,916 □'	395,18 . . □' —	82,331 □' —
Bayer. Maß.	587,44 Tagw.	146,864 Tagw.	58.745,6 □' Fuß	29.372,8 □' —	14.686,4 □' —	3671,904 □' —	489,54 □' —	101,989 □' —

* Versus war ein kampanisches Fl. Maß = 100 . 100 (L. Br.) = 10000 röm. = 10.198,9 bayer. Q.-Fuß.

** Ein römisches Haeredium beträgt also ungefähr $1\frac{1}{2}$ bayer. Tagwerk.

c) Masse für Flüssigkeiten.

Röm. Benennung.	Culeus.	Amphora Quadrantal	Urna.	Congius.	Sextarius.	Hemina.	Quartarius.	Acetabulum.	Cyathus.	Ligula.
	1	20	40	160	960	1920	3840	7680	11.520	46.080
		1	2	8	48	96	192	384	576	2.304
			1	4	24	48	96	192	288	1152
				1	6	12	24	48	72	288
					1	2	4	8	12	48
						1	2	4	6	24
							1	2	3	12
								1	1½	6
									1	4
										1
Franz. Maß.	25.820 französische	1291 Dd. Kubz.	645,5 —	161,75 —	26,9 —	13,5 —	6,75 —	3,375 —	2,25 —	0,5625 —
Bayer. Maß.	8 Eimer. —	24 Maßkannen.	12 Maßk. —	3 Maßk. —	½ Maßk. —	1 Quart. —	1 Achterl. —	½ Achterl. —	⅓ Achterl. —	$\frac{1}{12}$ Achterl. —

d) Masse für Getreide und trockene Waaren.

Röm. Benennung.	Quadrantal.	Modius.	Sextarius.	Hemina.	Quartarius.	Acetabulum.	Cyathus.	Ligula.
	1	3	48	96	192	384	576	2304
		1	16	32	64	128	192	768
			1	2	4	8	12	48
				1	2	4	6	24
					1	2	3	12
						1	$1\frac{1}{2}$	6
							1	4
								1
Franz. Maß.	1291 Par. Kubz.	430,3 —	26,9 —	13,5 —	6,75 —	3,375 —	2,25 —	0,5625 —
Bayer. Maß.	11 Sechztl. Metzen.	7 Maßl od. zwei u. dreiß.	$\frac{1}{2}$ Maßkanne.	1 Quart. —	1 Achterl. —	$\frac{1}{2}$ Achterl. —	$\frac{1}{3}$ Achterl. —	$\frac{1}{12}$ Achterl. —

e) Gewicht.

Römische Benennung.	Libra, Pondo, As.	Uncia.	Semuncia.	Duella.	Scilicus.	Sextula.	Drachma (Denarius).	Scrupulus.	Obolus.	Semiobolus.	Siliqua.	Leus.
* Die italienische oder römische Mine glich $1\frac{2}{3}$ röm. Pfd.	1	12	24	36	48	72	96	288	576	1152	1728	2304
		1	2	3	4	6	8	24	48	96	144	192
			1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	12	24	48	72	96
				1	$1\frac{1}{3}$	2	$2\frac{2}{3}$	8	16	32	48	64
					1	$1\frac{1}{2}$	2	6	12	24	36	48
						1	$1\frac{1}{3}$	4	8	16	24	32
							1	3	6	12	18	24
								1	2	4	6	8
									1	2	3	4
										1	$1\frac{1}{2}$	2
											1	$1\frac{1}{3}$
												1
Alt franz. Gran.	6048	504	252	168	126	84	63	21	10,5	5,25	3,5	2,625
Bayer. Pf. Hdlsgew. Gran.	4407	367,3	183,65	122,4	91,8	61,2	45,9	15,3	7,65	3,8	2,55	1,913
Kölnisch. Mark-Gewicht.	1 Mark 24488,5 Richtpfen.	Richtpf. 7502	Richtpf. 3751	Richtpf. 2501	Richtpf. 1875,5	Richtpf. 1250,5	Richtpf. 937,75	Richtpf. 312,5	Richtpf. 156,75	Richtpf. 78,38	Richtpf. 52,25	Richtpf. 39,19

Anmerkungen.

1) Folgende Unterabtheilungen des römischen Pfundes wurden mit einem bestimmten Namen bezeichnet:

Sextans = $\frac{1}{6}$ As. = 2 Unciis.	Septunx = $\frac{7}{12}$ As. = 7 Unc.
Quadrans = $\frac{1}{4}$ As. = 3 Unc.	Bes = $\frac{2}{3}$ As. = 8 Unc.
Triens = $\frac{1}{3}$ As. = 4 Unc.	Dodrans = $\frac{3}{4}$ As. = 9 Unc.
Quincunx = $\frac{5}{12}$ As. = 5 Unc.	Dextans = $\frac{5}{6}$ As. = 10 Unc.
Sextunx / Semissis } = $\frac{1}{2}$ As. = 6 Unc.	Deunx = $\frac{11}{22}$ As. = 11 Unc.

2) Das Geld der Alten ist von ihrem Gewichte abhängig. Die Römer hatten Gold-, Silber- und Kupfermünzen; aber das Verhältniß des Werthes dieser Metalle gegen einander war nicht immer das nämliche, wiewohl die Haupteintheilung des Pfundes (im Silber oder Golde) in seine kleinern Theile fast durchaus unverändert blieb.

3) Unter den römischen Kupfermünzen war die Einheit der Aß (As), dessen Vervielfachungen folgende sind:

a) Dupondius = 2 Assibus.	e) Sexis = 6 Assibus.
b) Sestertius = $2\frac{1}{2}$ Assibus.	f) Septussis = 7 Assibus.
c) Tressis seu Tripondius = 3 Assibus.	g) Vigesis = 20 Assibus.
d) Quinquessis = 5 Assibus.	bis h) Centussis seu Centum pondium = 100 Assibus.

Der römische Aß war anfänglich ein Pfund Kupfer, und würde nach bayerischem Gelde, wenn nach dem Münzfuße von 1762 die Kölner Mark Kupfer zu 100 Pfennig (im 20 fl. Fuße) ausgemünzt werden soll, 41,2 Kreuzer betragen haben. Bei den Römern war aber der Werth des Kupfers anfänglich viel geringer, und verhielt sich zum Werthe des Silbers nur wie 1 : 960. Da hob sich der Werth des Kupfers in der Folge, als man den Aß nach und nach bis auf eine Unze reduzirte.

In den alten Zeiten der römischen Republik, wo der Aß ein Pfund wog, galt der Silberdenar 10 Aß oder 10 Pfund Kupfer, der Quinar 5 Aß, die Sesterze $2\frac{1}{2}$ Aß.— Die Libelle, eine andere kleine Silbermünze, galt einen pfündigen Kupferaß; die Sembelle oder Selibelle einen Semissis oder halben Aß; der Terunzius einen Quadrans von drei Unzen.

Aber nach Verringerung des Aßes bis auf 1 Unze Kupfers wurde beschlossen, daß der Denar 16 solcher Aß (16 Unzen Kupfer), der Quinar

deren 8, und die Sesterze deren 4 gelten sollte, daher die letztere auch den Namen Quadrans führt. — Uebrigens ist zu merken, daß man in allen Summen, wo Sesterzen oder Denare vorkommen, jederzeit nach altem Gebrauche die Sesterze zu $2\frac{1}{2}$ Aß, und den Denar zu 10 Aß zu verstehen habe, wenn nicht die Schriftsteller ausdrücklich das Gegentheil sagen.

* Der Denar, welcher unter den Kaisern der tägliche Sold eines Soldaten war, hatte für diesen allein den Werth von 10 Aß, auch nach der Reduktion.

4) Um den Werth der römischen Gold- und Silbermünzen richtig bestimmen zu können, muß man neun verschiedene Perioden unterscheiden (angefangen vom Jahre V. C. 547, d. i. 207 Jahre vor Christus, wo in Rom die ersten Goldmünzen geprägt wurden.) Nimmt man nun an, daß nach oben bemeldetem Münzfuße die kölnische Mark Gold zu 283,1 fl., die Mark Silber aber zu 20 fl. geprägt werden soll; so ergibt sich für den Werth der römischen Münzen, im Vergleiche mit unserm (bayerischen) Gelde, folgende Berechnung.

Zeitraum.	Zahl der Aureus auf das Pfund Gold.	Zahl der Denarius auf das Pfund Silber.	Zahl der Sestertius auf das Pfund Gold.	Verhältniß des Silbers zum Golde.	Werth eines Aureus oder Gold-Denars.	Werth eines Silber-Denars.
I. Zeitraum V.C.547—560.	96	96	5760	1 : 15	5 fl. 9 kr.	20 kr. 5 hl.
II. 560—620.	48	84	4800	1 : $14\frac{2}{7}$	9 fl. 48 kr.	23 kr. 3 pf.
III. 620—635.	45	84	4500	1 : $13\frac{11}{28}$	9 fl. 48 kr.	23 kr. 3 pf.
IV. 635—650.	42	84	4200	1 : $12\frac{1}{2}$	9 fl. 48 kr.	23 kr. 3 pf.
V. 650—715.	40	84	4000	1 : $11\frac{19}{21}$	9 fl. 48 kr.	23 kr. 3 pf.
VI. 715—767.	41	86	4100	1 : $11\frac{69}{86}$	9 fl. 30 kr.	23 kr.
VII. Vom Tode August's bis Nero.	41	88	4100	1 : $11\frac{57}{88}$	9 fl. 16 kr.	22 kr. 2 pf.
VIII. Vom Tode Nero's bis Caracalla.	45	96	4500	1 : $11\frac{23}{32}$	8 fl. 35 kr.	20 kr. 5 hl.
IX. Unter Konstantin dem Großen.	72 (Solidi)	100	1440	1 : $14\frac{2}{5}$	6 fl. $35\frac{3}{4}$ kr.	19 kr. 3 pf.

5) Die Werthe der römischen Münzen aus der II., III., IV., V. Epoche pflegt man die mittleren zu nennen, und darnach ist auch die folgende Tabelle eingerichtet. — In der neunten Epoche trat an die Stelle des Golddenars der Solidus (Soud'or); auch gab es Quinar's oder halbe Solidi. — In der folgenden Tabelle ist der mittlere Werth eines Denars zu 24 kr. bayer. angenommen.

f) Römische Münzen.

(Nach ihrem mittleren Werthe.)

Römische Benennung.	Sestertium.	Aureus.		Argenteus.		Sestertius.	Libella (As.)	Sembella.	Teruncius.
		Denarius.	Quinarius (Victoriatus.)	Denarius.	Quinarius (Victoriatus.)				
	1	10	20	250	500	1000	2500	5000	10000
		1	2	25	50	100	250	500	1000
			1	$12\frac{1}{2}$	25	50	125	250	500
				1	2	4	10	20	40
					1	2	5	10	20
						1	$2\frac{1}{2}$	5	10
							1	2	4
								1	2
									1
Werth im bayer. Gelde.	100 fl.	10 fl.	5 fl.	24 kr.	12 kr.	6 kr.	$2\frac{2}{5}$ kr.	$1\frac{1}{5}$ kr.	$2\frac{2}{5}$ pf.

Anmerkung. Die große Sesterze (Sestertium) war keine wirkliche, sondern eine Rechnungsmünze, und galt 1000 kleine Sesterzen. Man bezeichnete die große Sesterze durch die Buchstaben HS. Z. B. CHS. = 100 große = 100.000 kleine Sesterzen. Hier ist nun zu merken, daß, wenn die Zahl über 100.000 steigt, die Worte: Centena millia, von den Römern gewöhnlich ausgelassen worden, und also zu suppliren seyen. In einem solchen Falle stehen bloß die Adverbia Numeralia mit Numum oder Sestertium. Z. B. Quinquagies Numum = 5'000.000 kleine = 5000 große Sesterzen.

B) Masse der Griechen.

a) Kleinere Linien- und Längen-Masse.

			fr. Lin.		oder bayer. Lin. Dd.
(α) Δάκτυλος	= 1		beträgt 7,7004	=	8,57 —
(β) Κόνδυλος	= 2 Δακτύλοις		— 15,4008	=	17,14 —
(γ) Παλαιςή	= 4	—	— 30,8016	=	34,28 —
(δ) Διχάς	= 10	—	— 77,004	=	85,7 —
(ε) Ὀρθόδωρον	= 11	—	— 84,7044	=	94,27 —
(ς) Σπιθαμή	= 12	—	— 92,4048	=	102,84 —
Πȣ̃ςγεωμετρικός	= 16	—	— 123,2064	=	137,12 —
(ζ) Πυγμή	= 18	—	— 138,6072	=	154,26 —
(η) Πυγών	= $18\frac{14}{27}$	—	— 142,6052	=	158,7 —
(θ) Πῆχυς	= 24	—	— 1,2834 Fuß		1,4283 Fuß.
Βῆμα ἁπλȣ̃ν	= 40	—	— 2,139	=	2,366 —
Ξύλον	= 72	—	— 3,8502	=	4,285 —
Βῆμα διπλȣ̃ν	= 80	—	— 4,278	=	4,7333 —
Ὀργυιά, ἑξαποδής	= 96	—	— 5,1336	=	5,7133 —
(ι) Ἄκαινα δεκαποδὴς	= 160	—	— 8,556	=	9,466 —
Ἄκαινα δωδεκαποδὴς	= 192	—	— 10,2672	=	11,4266 —
Πλέθρον	= 1600	—	— 85,56	=	94,66 —
Σχοῖνος der persische	= 1920	—	— 102,672	=	114,266 —

* α. Fingerbreite.

β. Die halbe Querhand.

γ. Die Querhand oder Breite der vier Finger.

δ. Die Spanne zwischen Daumen und Zeigefinger.

ε. Gerade Hand der Länge nach vom Gelenke bis zum äußersten Finger.

ς. Spanne zwischen dem Daumen und kleinen Finger.

ζ. Die Länge von den eingelegten Fingern bis zum Ellenbogen, mittlerer griech. Fuß.

η. Großer griechischer Fuß.

θ. Die gemeine oder lithische Elle, auch Mittel-Elle Herodot's genannt.

ι. Gemeine Ruthe.

Anmerkung. Außer diesen gab es in den verschiedenen Staaten Griechenlands noch folgende Fuß- und Ellenmaße:

			fr. Linien.		bayer. Linien.
1. Der Fuß des kleinen Stadiums . . . . =	$9\frac{9}{16}$ *Δακτύλ.*	=	73,6349	=	81,95
2. Der Fuß des kleomedischen Stadiums . .	$12\frac{13}{16}$ —	=	98,6613	=	109,8
3. Der pythische oder delphische Fuß (auch Fuß von Marseille) . . .	$14\frac{2}{9}$ —	=	109,5168	=	121,88
4. Der griechisch-olympische Fuß	17,69 —	=	136,11	=	151,6033
5. Königlicher oder philetärischer Fuß . . .	20 —	=	154,008	=	171,4
6. Die pythische oder delphische oder die kleine Elle von Aegypten und Samos	$12\frac{1}{3}$ —	=	164,2752	=	182,83
7. Die königliche oder babyl. Elle des Herodot, schwarze Elle der Araber	27 —	=	207,9108	=	231,39
8. Die heilige Elle, Elle von Kairo, Elle des Nilmessers, hachemische Elle der Araber	32 —	=	246,4128	=	274,24
9. Chebel oder Feldmesserkette, halber persischer *Σχοῖνος*	960 —	=	51,336 Fuß	=	57,133 Fuß
10. Die *Ἄρουρα*, oder das gewöhnliche Flächenmaß, hatte 10 gemeine Akänen in der Länge, und eben so viele in der Breite, . . . =	franz. Fuß 85,16 × 85,16	=	— 7252,2 □ Fuß fr. Maß.	=	— 8961,7 □ Fuß bayer. Maß.

b) Reisemasse der Alten.

	franz. Fuß.	geben auf die geograph. Meile.
1. Stadium des Aristoteles (der Märsche Alexanders des Großen)	306,812	74,323
2. Stadium des Kleomedes . . .	411,09	55,47
3. Pythisches oder delph. Stadium	456,32	49,972
4. Stadium des Eratosthenes . .	486	46,92
5. Nautisches Stadium des Herodot und Possidonius	513,36	44,419
6. Griechisch-olympisches Stadium	567,13	40,208
7. Philetärisches oder königliches Stadium	641,7	35,535
8. Das große Stadium, auch das ägyptische oder alexandrinische genannt	684,09	33,333
9. Der *Δίαυλος*	1026,72	22,210
10. Das *Ἱππικόν*	2053,44	11,105
11. Die persische oder asiatische Meile	5133,6	4,4419
12. Die indische Koß	7700,4	2,9613
13. Der *Δολιχός*	8221,8	2,7735
14. Die Parasange des Herodot . .	15400,8	1,4806
15. Der *Σχοῖνος* von Delta oder Nieder-Aegypten	20534,4	1,1105
16. Der *Σχοῖνος* von Ober-Aegypten oder der thebaische	30801,6	0,7752
17. Der Heptanomische *Σχ.* von Mittel-Aegypten	61603,2	0,3876
18. Die Tagreise *Διαῖτα*	154008	0,14806

c) Maße für Flüssigkeiten.

Griech. Benennung.	Μετρητής.	Χοῦς.	Ξέστης.	Κότυλος.	Τέταρτον.	Ὀξύβαφον.	Κύαθος.	Κόγχη.	Μύστρον.	Χήμη.	Κοχλιάριον.
	1	12	72	144	288	576	864	1728	3456	4320	8640
		1	6	12	24	48	72	144	288	360	720
			1	2	4	8	12	24	48	60	120
				1	2	4	6	12	24	30	60
					1	2	3	6	12	15	30
						1	1½	3	6	7½	15
							1	2	4	5	10
								1	2	2½	5
									1	1¼	2½
										1	2
											1
Franz. Maß.	1540,8 Kubzoll.	128,4	21,4	10,7	5,35	2,675	1,79	0,895	0,452	0,358	0,179
Bayer. Maß.	28,6 bayer. Maßkannen.	2,4	0,4	0,2	0,1	0,05	0,033	0,0166	0,00833	0,00666	0,00333

d) Getreidmaße.

Μέδιμνος.	Ἑκτεύς.	Χοῖνιξ.	Ξέστης.	Κότυλος.	Ὀξύβαφον.	Κύαθος.	Κοχλιάριον.	franz. Kubz.
1	6	48	96	192	768	1152	11520	1540,8
	1	8	16	32	128	192	1920	256,6
		1	2	4	16	24	240	32,08
			1	2	4	6	60	16,04
				1	2	3	30	8,02
					1	$1\frac{1}{2}$	15	2,005
						1	10	1,336
							1	0,1336
$26\frac{1}{2}$ Dreißger.	$4\frac{5}{12}$ —	$1\frac{10}{108}$ Sechziger.	$\frac{59}{108}$ —	0,15 Maßkanne.	0,075 —	0,05 —	0,005 —	bayer. Maß.

Anmerkung 1. Der *Μετρητής* war ein Körpermaß, dessen Länge, Breite, Höhe einen griechischen Fuß betrug. Er heißt manchmal auch *Κάδος, διώτη*. Es gab in Griechenland acht verschiedene Metreten nach Verschiedenheit der Fußmaße, welche zum Grunde gelegt wurden.

		fr. Kubz.	bayr. Mß.
1.	Metretes oder Kubus des delph. Fußes	= 760,21	= 14,074
2.	— — des geometr. Fußes	= 1082,4	= 20,082
3.	— — des griech.-olymp. Fußes . .	= 1459,2	= 27,077
4.	— — der Pygme oder des mittleren griech. Fußes	= 1540,8	= 28,593
5.	— — des Pygon	= 1678,4	= 31,145
6.	— — des königlichen oder philetärischen Fußes	= 2113,6	= 39,13
7.	— — der pythischen oder kleinen Elle (ägyptischer Metretes oder des Ptolemäus)	= 2564,3	= 47,584
8.	— — der Mittel-Elle von 24 *Δακτύλ.* oder syrischer Metretes . .	= 3652,9	= 67,784

Die vorangehenden Reduktionen beziehen sich auf den mittleren attischen Metretes.

Anmerkung 2. Das griechische Gewicht hatte mit dem Gelde einerlei Eintheilung. Die folgende Reduktion bezieht sich auf die attische Mitteldrachme von 78 Pariser Gran.

e) Münzen und Gewicht der Griechen.

	Τάλαντον.	Μνᾶ.	Τετράδραχμον	Δίδραχμον.	Δραχμή.	Γράμμα.	Ὀβολός.	Κεράτιον.	Χαλκοῦς.	Λεπτόν.	Gewichtsbetrag. Kölnisches Markgewicht.	Gewichtsbetrag. Bayerisches Handelsgew.
	1	60	1500	3000	6000	18000	36000	108000	288000	1728000	106 Mark 19364 Richtpf.	44,4 Pfd.
		1	25	50	100	300	600	1800	4800	28.800	1 Mark 50567 Richtpf.	23,7 Loth
			1	2	4	12	24	72	192	1152	4644,12 R.	3,8 Qtl.
				1	2	6	12	36	96	576	2322,06 R.	1,9 Qtl.
					1	3	6	18	48	288	1161,03 R.	3,8 Pfgw.
						1	2	6	16	96	387,01 R.	1,266 Pfg.
							1	3	8	48	193,505 R.	9,5 Gran.
								1	$2\frac{2}{3}$	16	64,50166 R.	3,166 Gr.
									1	6	24,1882 R.	1,185 Gr.
										1	4,04704 R.	0,1975 Gr.
Geldbetrag.	fl. 2551,68	fl. 42,5	fl. 1,7011	Kr. 51,13	Kr. 25,5	Kr. 8,5	Kr. 4,25	Kr. 1,416	Hl. 4,25	Hl. 0,708	—	—

Verschiedene Talente und Drachmen der Griechen.

	Paris. Gran.	Als Gewicht. Köln. Mark.	Richt-Pfennige.	Als Münzen.
1. Drachme von Aegium, oder die peloponnesische . .	60	—	893,10	19,6 kr.
Talent	—	81	50184	1962,84 fl.
2. Drachme von Samos, oder kleine attische (auch ὁλκή genannt	63	—	937,755	20,6 kr.
Talent	—	85	55970	2060 fl.
3. Drachme von Chalcis und Euböa (Rhodus) . .	66	—	982,41	21,5 kr.
Talent	—	89	61756	2159,1 fl.
4. Drachme von Tyrus oder phönizische	69	—	1027,065	22,5 kr.
Talent	—	94	2006	2257,26 fl.
5. Drachme von Ephesus oder die jonische	72	—	1071,72	23,5 kr.
Talent	—	98	7792	2355,42 fl.
6. Drachme von Kreta oder Chios	75	—	1116,375	24,5 kr.
Talent	—	102	13578	2453,52 fl.
7. Attische oder Mitteldrachme	78	—	1161,03	25,5 kr.
Talent	—	106	19364	2551,68 fl.
8. Attisch-sicilische Drachme	81	—	1205,685	26,49 kr.
Talent	—	110	25150	2649,84 fl.
9. Große attische oder korinthische Drachme . .	84	—	1250,34	27,4 kr.
Talent	—	119	3256	2747,94 fl.
10. Drachme von Abacône oder Istros	90	—	1339,65	29,4 kr.
Talent	—	122	42508	2944,26 fl.
11. Drachme von Pylos oder Elis	96	—	1428,96	31,4 kr.
Talent	—	130	54080	3140,52 fl.
12. Drachme von Reggium, oder Naxos	105	—	1562,925	34,3 kr.
Talent	—	143	5903	3434,94 fl.
13. Drachme von Alexandrien	126	—	1875,51	41,2 kr.
Talent (auch das hebräische)	—	171	46404	4121,94 fl.
14. Drachme von Aegina	140	—	2083,9	45,7 kr.
Talent	—	190	51560	4579,92 fl.

C) Hebräische Masse.

a) Längenmasse.

Sabbatherweg.	Kaneh Ruthe.	Amah Elle.	Zereth Spanne.	Tophach Palme.	Ezbeah Finger.	franz. Fußmaß.	bayer. Fußmaß.
1	$333\frac{1}{3}$	2000	4000	12.000	48.000	3422,4 Fuß	3826,877 Fuß
	1	6	12	36	144	10,2672 Fuß	11,4266 Fuß
		1	2	6	24	20,5344 Zoll	22,8533 Zoll
			1	3	12	10,2672 Zoll	11,4266 Zoll
				1	4	3,4224 Zoll	3,8088 Zoll
					1	10,2672 Lin.	11,4266 Lin.

* Die hebräische Meile betrug 4106,88 franz. Fuß.

** Der Gibrath = ½ Sabbatherweg = 1711,2 fr. Fuß.

b) Masse für Flüssigkeiten.

Bathus.	Hin.	Logus.	Ovum Rabbin.	fr. Kubikzoll.	bayer. Maßkanne.
1	6	72	432	1082,4	20,085
	1	12	72	180,4	3,314
		1	6	15,033	0,276
			1	2,505	0,046

* Der Bathus, Epha, oder hebräische Metretes war der kubirte Zereth.

c) Getreidmasse.

Hebräische Benennung.	Chorus, s. Chomer.	Lethech.	Epha.	Seah, s. Satum.	Homer, s. Gomor.	Kabus.	Ovum Rabbin.
	1	2	10	30	100	180	4320
		1	5	15	50	90	2160
			1	3	10	18	432
				1	$3\frac{1}{3}$	6	144
					1	$1\frac{1}{5}$	$43\frac{4}{5}$
						1	24
							1
Fr. Kubz.	10.824	5,412	1082,4	360,8	108,24	60,133	2,5055 frz. Kbz.
bayer. Maß	5,794 Mß.	2,897	0,5794	0,1931	0,05794	0,0322	0,00134 b. Mß.

d) Münzen und Gewichte.

Kikar (Talent)	Maneh (Mine)	Sekel (Siclus)	Gerah (Obolus)	Minutum Λεπτόν	Als Gewicht. Köln. Markgewicht.	Als Geld.
1	50	3000	60.000	2592.000	171 M. 46404 Rpf.	4121,94 fl.
	1	60	1200	51.840	3 M. 28453,2 Rpf	82,4308 fl.
		1	20	864	3751,02 Rpf.	1,37398 fl.
			1	43⅕	187,551 Rpf.	4,12194 kr.
				1	4,34143 Rpf.	0.76 hl.

Vermischte Anmerkungen.

1. Die kleine attische Tetradrachme, oder der griechische Stater (Στατήρ) war zugleich der hebräische Sekel (Siclus, oder schlechthin argenteus), d. i. die alexandrinische Didrachme.

2. Der attische Aureus (χρυσέος) wog eine silberne Didrachme, hatte aber dabei einen zehnfachen Werth.

3. Bei den Hebräern war das Verhältniß des Silbers zum Golde wie 1 : 12. Das hebräische Talent Goldes betrug also nach unserm Gelde 45.463,28 fl.

Anhang.

Ueber Zahlenbezeichnung und Zahlensystem der Griechen, und über Zahlenbezeichnung der Römer.

Die Griechen bedienten sich der Buchstaben ihres Alphabets als Zahlzeichen, und zwar in der Art, daß die Buchstaben in ihrer gewöhnlichen Ordnung von α bis ϑ die Einheiten, von ι bis π die Zehner, und von ρ bis ω die Hunderter bedeuteten. Da aber hiezu 27 Buchstaben erfordert werden, im griechischen Alphabete nur 24 vorkommen, so mußten noch 3 besondere Zahlzeichen hinzu kommen. Diese sind

1) das Zeichen ϛ (βαῦ) in Gestalt von στιγμα, für 6,
2) das Zeichen ϟ (κόφη), für 90,
3) das Zeichen ϡ (Σὰν πι) für 900.

Die Zahlenbezeichnung der Griechen war demnach folgende:

Einheiten: (μονάδες)	Zehner: (δεκάδες)	Hunderter: (ἑκοντάδες)
α = 1	ι = 10	ρ = 100
β = 2	κ = 20	σ = 200
γ = 3	λ = 30	τ = 300
δ = 4	μ = 40	υ = 400
ε = 5	ν = 50	φ = 500
ϛ = 6	ξ = 60	χ = 600
ζ = 7	ο = 70	ψ = 700
η = 8	π = 80	ω = 800
ϑ = 9	ϟ = 90	ϡ = 900

Bei der Aneinanderreihung der Zahlen gilt das Gesetz: die größere Zahl kommt zur Linken, die kleinere zur Rechten. Um die Zahlen von den Buchstaben zu unterscheiden, setzten die Griechen über die Zahlen einen Querstrich.

Zur Bezeichnung der Tausende bediente man sich wieder der 9 ersten Zahlenzeichen, jedoch mit dem Unterschiede, daß man denselben unterhalb einen Strich vorsetzte. So wurde z. B. 3654 angeschrieben ,γχνδ.

Um die Zehntausender zu bezeichnen, schrieb man über, vor oder nach *M* oder *Mυ* (*Μυριάς*, 10000) die Zeichen der Einheiten; zur Bezeichnung der Hunderttausender, Millionen und Zehnmillionen verband man auf die nämliche Art mit *M* die Zeichen der Zehner, Hunderter, Tausender. Z. B. 97'643,028 = $\overset{,\vartheta\psi\xi\delta}{M}\ \overline{,\gamma\kappa\eta}$ oder 141,680 = *Mιδ.* $\overline{,\alpha\chi\pi}$. Bei der letztern Bezeichnungsart wurde immer am Ende der dem *M* angehängten Zahl ein Punkt gesetzt.

Die Zahlen wurden in Ordnungen von 8 Stellen (ὀκτάς), und eine solche in 2 Klassen eingetheilt, daß also eine Klasse 4 Stellen, die zweite die Myriaden enthält. Auf die nämliche Art, nach welcher die Zahlen der ersten Ordnung (πρῶτοι ἀριϑμοι) bezeichnet wurden, bezeichnete man auch die der zweiten (δεύτεροι), der dritten (τρίτοι) 2c. Ordnung, wobei man das *M* als Faktor wiederholte, daß z. B. *αMM* (μύριαι μυριάδες τῶν πρώτων ἀριϑμῶν oder μονὰς τῶν δευτέρων ἀριϑμῶν) = 10000.10000 = 100000000, *αMMM* (μυριὰς τῶν δευτέρων ἀριϑμῶν) = 10000 . 10000 . 10000 = 10000 0000 0000 ist.

Zur Bezeichnung der Brüche bedienten sich die Griechen weit häufiger der Worte, als bestimmter Zeichen. Im letzten Falle geschah die Bezeichnung auf folgende Weise:

Alle Brüche, deren Zähler 1 ist, drückten sie dadurch aus, daß sie über die Zahl des Nenners, welche nach der oben angegebenen Art bezeichnet wurde, einen Strich in Form eines Acutus setzten. Z. B. $\varsigma' = \frac{1}{6}$. Nur für $\frac{1}{2}$ hatten sie ein besonderes Zeichen, nämlich $\angle$.' Uebersteigt aber der Zähler die Einheit, so wird der Zähler als ganze Zahl geschrieben, und ihm zur Rechten oder über ihm mit einem Acutus der Nenner. Z. B. $\frac{2}{3} = \overline{\beta}\gamma'$ oder $\overline{\beta\gamma'}$ oder $\overset{\gamma'}{\beta}$; $\frac{11}{40} = \overline{\iota\alpha}\mu' = \overset{\mu'}{\iota\alpha}$.

Nach dieser Bezeichnungsart der Zahlen mußte die Rechnung auch weitläufiger und schwieriger seyn, als sie bei unsern Zahlzeichen ist. Hier folgen zwei Multiplikationsbeispiele aus dem Kommentare des Eutokius:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\tau\varsigma} & = & 306 \\
\overline{\tau\varsigma} & = & 306 \\
\hline
\overset{\vartheta}{M}\overline{,\alpha\omega} & = & \begin{cases} 90000 \\ 1800 \end{cases} \\
\overline{,\alpha\omega\lambda\varsigma} & = & \begin{cases} 1800 \\ 36 \end{cases} \\
\hline
\overset{\vartheta}{M}\overline{,\gamma\chi\lambda\varsigma} & = & 93636
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\overline{,\alpha\vartheta\varsigma'} & = & 1009\frac{1}{6} \\
\overline{,\alpha\vartheta\varsigma'} & = & 1009\frac{1}{6} \\
\hline
\overset{\varrho}{M}\overline{,\vartheta\varrho\xi\varsigma\angle\varsigma'} & = & \left| \begin{array}{r} 1000000 \\ 9000 \\ 166\frac{1}{2}+\frac{1}{6} \end{array} \right. \\
\overline{,\vartheta\pi\alpha\alpha\angle} & = & \left| \begin{array}{r} 9000 \\ 81 \\ 1\frac{1}{2} \end{array} \right. \\
\overline{\varrho\xi\varsigma\angle\varsigma'}\overline{\alpha}\angle\lambda\varsigma' & = & \left| \begin{array}{r} 166\frac{1}{2}+\frac{1}{6} \\ 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{36} \end{array} \right. \\
\hline
\overset{\varrho\alpha}{M}\overline{,\eta\upsilon\iota\zeta\gamma'\lambda\varsigma'} & = & 1018417\frac{1}{3}+\frac{1}{36}.
\end{array}$$

Auch die Zahlzeichen der Römer erhielten nach und nach die Gestalt von Buchstaben ihres Alphabets: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

Die übrigen Zahlen bezeichneten sie durch Zusammensetzung dieser 7 Zeichen in der Art, daß das nämliche Zeichen wiederholt, oder das Zeichen einer kleineren Zahl nach dem einer größeren gesetzt — additiv, das Zeichen einer kleineren Zahl vor dem einer größeren gesetzt — subtraktiv genommen wird. Z. B. MDCXI = 1000 + 500 + 100 + 10 + 1 = 1611, IV = 5 − 1 = 4, XC = 100 — 10 = 90.

Statt D = 500 wird auch IↃ, woraus jenes wahrscheinlich entstanden, eben so statt M = 1000 auch CIↃ gesetzt. Das Zeichen Ↄ drückt, zumal in Verbindung mit C, bei einer Wiederholung das Zehnfache einer Zahl aus. Z. B. IↃↃ = 5000, CCIↃↃ = 10000, CCCIↃↃↃ = 100000, CCCCIↃↃↃↃ = 1000000. Dagegen CIↃCIↃ = MM = 2000.

Brüche wurden durch Worte ausgedrückt, z. B. dimidia pars = $\frac{1}{2}$, tertia pars = $\frac{1}{3}$, duae partes = $\frac{2}{3}$, tres partes = $\frac{3}{4}$, duae septimae = $\frac{2}{7}$, $\frac{(\frac{1}{2})}{4}$ = dimidia quarta. In gleicher Art ist centesima. = $\frac{1}{100}$. Usura centesima = 1 Prozent nach der Zinsberechnung der Römer, welche monatliche Zinsen berechneten, nach unsrer Zinsberechnung = 12 Prozent. In gleicher Art war

Deunx centesima nach römischer Berechnung = $\frac{11}{12}$ p. c., nach unsrer = $\frac{11}{12}$. 12 = 11 p. c.

Sextans centesima nach röm. Berechn. = $\frac{5}{6}$ p. c., nach unsrer = $\frac{5}{6}$. 12 = 10 p. c.

Dodrans centesima nach röm. Berechn. = $\frac{3}{4}$ p. c., nach unsrer = $\frac{3}{4}$. 12 = 9 p. c.

Bescentesima nach röm. Berechnung = $\frac{8}{12}$ p. c., nach unsrer = $\frac{8}{12}$. 12 = 8 p. c.

Quincunx centesima nach röm. Berechn. = $\frac{5}{12}$ p. c., nach unsrer = $\frac{5}{12}$. 12 = 5 p. c.

u. s. w.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Weigl, Joh. B.

Lehrbuch der Rechenkunst zum Gebrauche an lateinischen und Gewerbsschulen und zum Selbstunterrichte

Sulzbach 1846

Math.p. 633 e
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083073-6